1

Si determinino le espansioni in serie bilatera centrata in $z = 0$ per la funzione $\frac{1}{z(z-1)(z-i)}$ nelle regioni $0 < |z| < 1$ e $|z| > 1$.

Soluzione: Cominciamo da $0 < |z| < 1$. Il coefficiente c_n di z^n nella serie di Taylor che converge in questa corona è dato dall'integrale su un cerchio centrato in $z = 0$ di raggio < 1, orientato in senso antiorario, di

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{z(z-1)(z-i)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)} \ . \tag{1}$$

Per $n \leq -2$, questa funzione è analitica all'interno del cammino di integrazione, dunque $c_n = 0$ per $n \leq -2$. Per $n \geq -1$ invece, usando Cauchy, deformiamo il cammino a un cerchio di raggio $R > 1$, più due cerchi in senso orario intorno a $z = 1$ e $z = i$. Chiamando questi tre cammini rispettivamente γ_R, $-\gamma_1$ e $-\gamma_i$ (in modo che γ_1 e γ_i siano orientati in senso orario). Otteniamo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_R} - \oint_{\gamma_1} - \oint_{\gamma_i}\right)\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)} \ .$$

Per l'integrale su γ_R usiamo la stima

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)}\right| \leq 2\pi R \times \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R^{n+4}}(1 + \mathcal{O}(R^{-1})) \ , \quad \text{per } R \to +\infty \ . \tag{2}$$

Pertanto dato che $n \geq -1$ e che per Cauchy possiamo liberamente prendere il limite $R \to +\infty$ senza modificare l'integrale, otteniamo che il contributo su γ_R è zero. D'altra parte la formula integrale di Cauchy (a posteriori, anche il teorema dei residui) ci dice che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)} &= \frac{1}{1-i} \ , \\
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_i}\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)} &= \frac{1}{(i)^{n+2}(i-1)} = \frac{(-i)^n}{1-i} \ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Quindi in definitiva nella regione $0 < |z| < 1$ otteniamo

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per } n \leq -2 \\ \frac{1}{i-1}(1 + (-i)^n) & , \quad \text{per } n \geq -1 \ . \end{cases}$$

Consideriamo ora $|z| > 1$. In questo caso il coefficiente c_n è calcolato da un integrale della stessa funzione (1) ma stavolta su un cerchio contenuto nella nuova corona che ci interessa, ovvero un cerchio centrato nell'origine e di raggio $R > 1$. Possiamo chiamare questo cammino γ_R come abbiamo fatto sopra, e varrà per $|c_n|$ la stima fatta in (2). Visto che per Cauchy possiamo liberamente prendere il limite $R \to +\infty$ senza modficare l'integrale, ne concludiamo che stavolta per $n \geq -2$ i coefficienti c_n sono nulli. Rimangono da calcolare i coefficienti c_n con $n \leq -3$. In questo caso deformiamo il cammino ad avere un raggio piú piccolo fino a farlo diventare la somma di tre contributi: un cerchio γ_0 attorno a $z = 0$ di raggio < 1, un cerchio γ_1 attorno a $z = 1$, e un cerchio γ_i attorno a $z = i$, tutti e tre orientati in senso orario. Dunque

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_0} + \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_i}\right)\frac{1}{z^{n+2}(z-1)(z-i)} \ .$$

L'integrale su γ_0 fa zero perchè siamo nel caso $n \leq -3$ e la funzione è analitica al suo interno per questo range di n. Per gli integrali su γ_1 e γ_i abbiamo invece esattamente gli stessi risultati di sopra in eq. (3). Dunque per $|z| > 1$ otteniamo

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \ \text{per } n \geq -2 \\ \frac{1}{1-i}(1 + (-i)^n) & , \ \text{per } n \leq -3 \ . \end{cases}$$