LEZIONE 21

Abbiamo visto la definizione di $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ per $f \in L^1(\mathbb{R})$ sommabile.

Abbiamo visto varie proprietà: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$ e scambia derivate con la moltiplicazione per una fase:

$$\begin{cases} it \Longrightarrow \dfrac{d}{d\omega} \\ \dfrac{d}{dt} \Longrightarrow -i\omega \end{cases}$$

* Teorema di Riemann-Lebesgue: $\boxed{\hat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0}$

Per provarlo ci serve: Fatto: ogni $f \in L^1$ può essere approssimata a piacere in norma L^1 con una funzione C^∞ a supporto compatto → fa 0 fuori da un intervallo chiuso

Dim: $f \in L^1$, $\bar{f} \in C^\infty$ a supporto compatto, $\bar{f} \in L^1$

$$\|\hat{f} - \hat{\bar{f}}\|_{C^0} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega) - \hat{\bar{f}}(\omega)|$$

$$\leq \|f - \bar{f}\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall \varepsilon > 0$ possiamo trovare $\bar{f}$ che soddisfa questa disuguaglianza grazie al Fatto

$$\hat{\bar{f}}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[\bar{f}'(t)](\omega)$$

$\mathcal{F}[\bar{f}'(t)](\omega)$ è una funzione limitata di ω

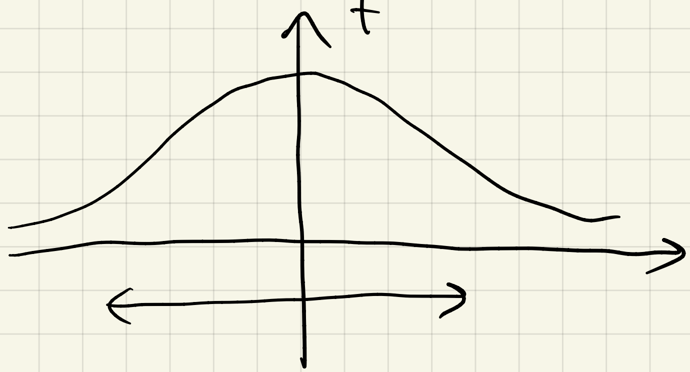
per ω sufficientemente grande: $|\hat{\bar{f}}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ per ω suff. grande:

$$|\hat{f}(\omega)| < |\hat{f}(\omega) - \hat{\bar{f}}(\omega)| + |\hat{\bar{f}}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

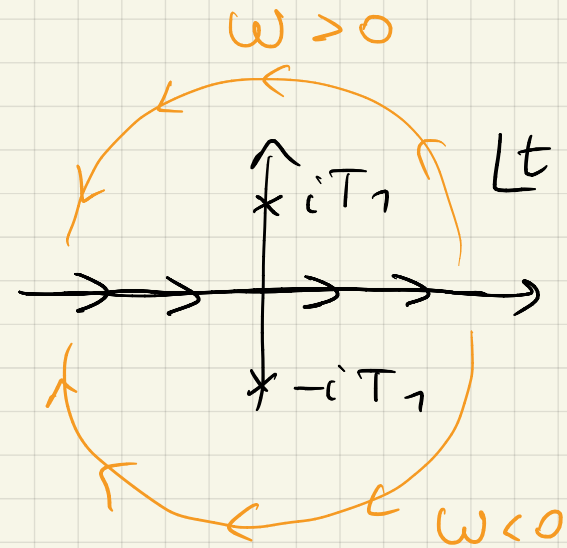
Esempi:

$$* \quad f(t) = \frac{1}{t^2 + T_1^2}, \quad T_1 \in \mathbb{R}, \; T_1 > 0$$



$$\underline{\underline{f \in L^1}}$$

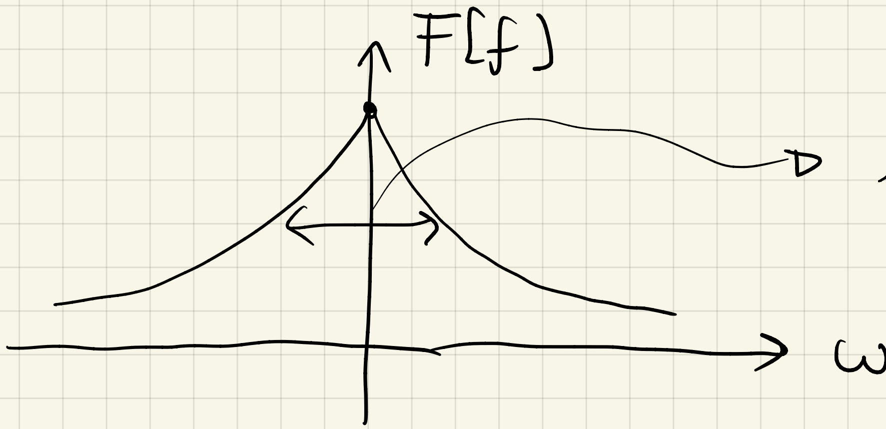
$$\boxed{\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} \frac{1}{t^2 + T_1^2}}$$



Lemma di Jordan

$$= \begin{cases} \omega > 0: & \cancel{2}\pi\cancel{i} \, \dfrac{1}{\cancel{2i} T_1} \, e^{\underbrace{i\omega(iT_1)}_{-\omega T_1}} \\[2em] \omega < 0: & \cancel{-2}\pi\cancel{i} \, \dfrac{1}{\cancel{-2i} T_1} \, e^{\underbrace{i\omega(-iT_1)}_{+\omega T_1}} \end{cases} = \boxed{\frac{\pi}{T_1} e^{-|\omega| T_1}}$$

$$\left[\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{\pi}{T_1} e^{-|\omega| T_1} \right]$$



larghezza : $1/T_1$.

Notiamo anche che $f(t)$ ha ∞ derivate e tutte queste derivate sono in $L^1(\mathbb{R})$

$f^{(k)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k$ $\Longrightarrow$ $\omega^k \hat{f}(\omega)$ deve essere una funzione continua e limitata $\forall k$ ✓

va a 0 esponenzialmente per $|\omega| \to \pm\infty$

D'altra parte invece: $tf(t) = \dfrac{t}{t^2 + T_1^2}$

$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$

perché per t grande va come $\dfrac{1}{t}$

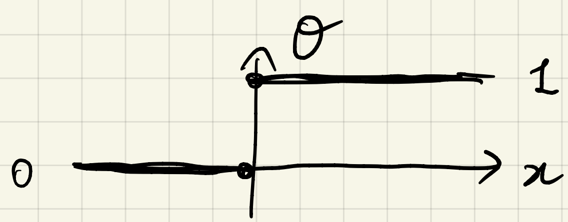
$\Longrightarrow$ $\dfrac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$ non sarà una funzione continua e limitata

la derivata ha una discontinuità in $\omega = 0$.

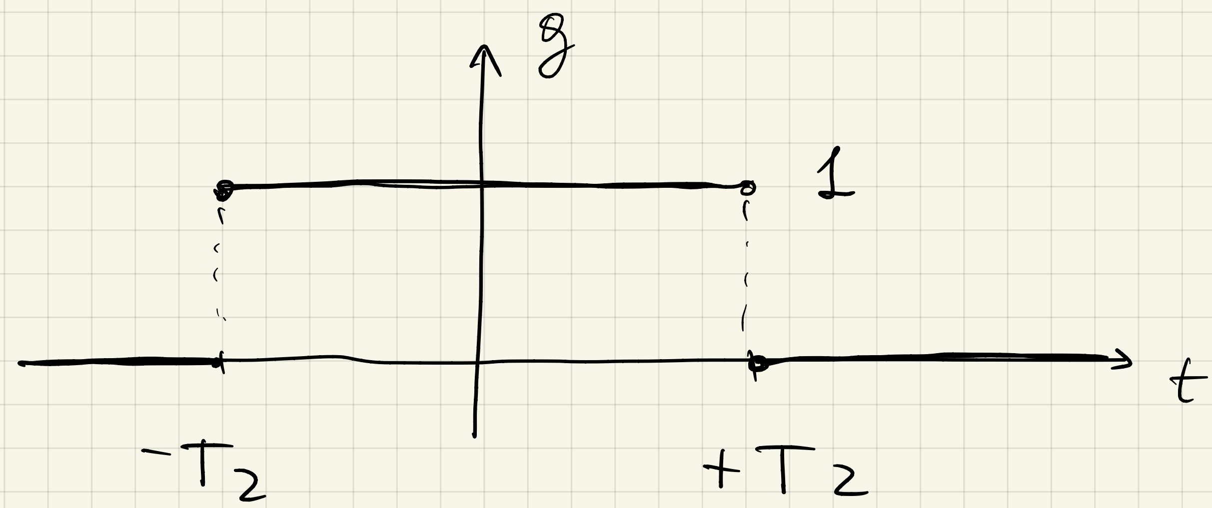
*

$$g(t) = \theta(T_2 - |t|)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



theta di Heaviside

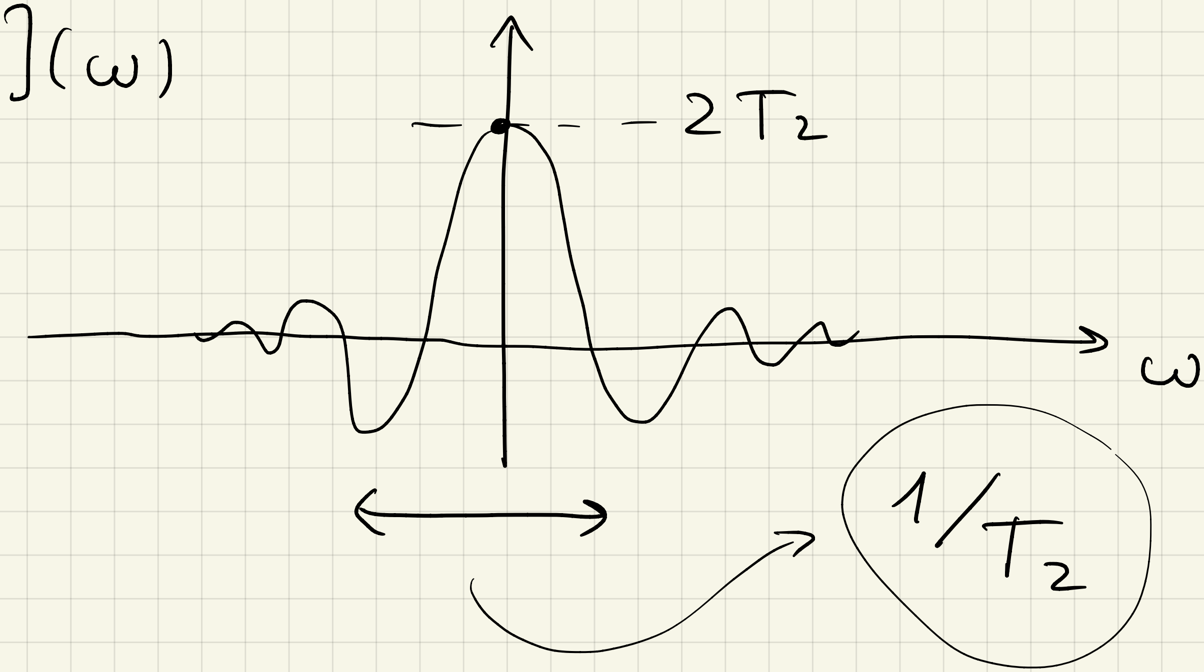


$$\mathcal{F}[g](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\, \underbrace{\theta(T_2 - |t|)}_{\text{ci restringe all'intervallo } [-T_2, T_2]}$$

$$= \int_{-T_2}^{+T_2} dt\, e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}\Big|_{-T_2}^{T_2}$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega T_2} - e^{-i\omega T_2}\right) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_2)$$

$\mathcal{F}[g](\omega)$



$$\boxed{\hat{g}(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega T_2)}$$

g(t) non è derivabile $\iff$ $\omega^k \hat{g}(\omega)$ non è una funzione continua limitata che tende a 0 a infinito (Riemann-Lebesgue) $\forall k \geq 1$.

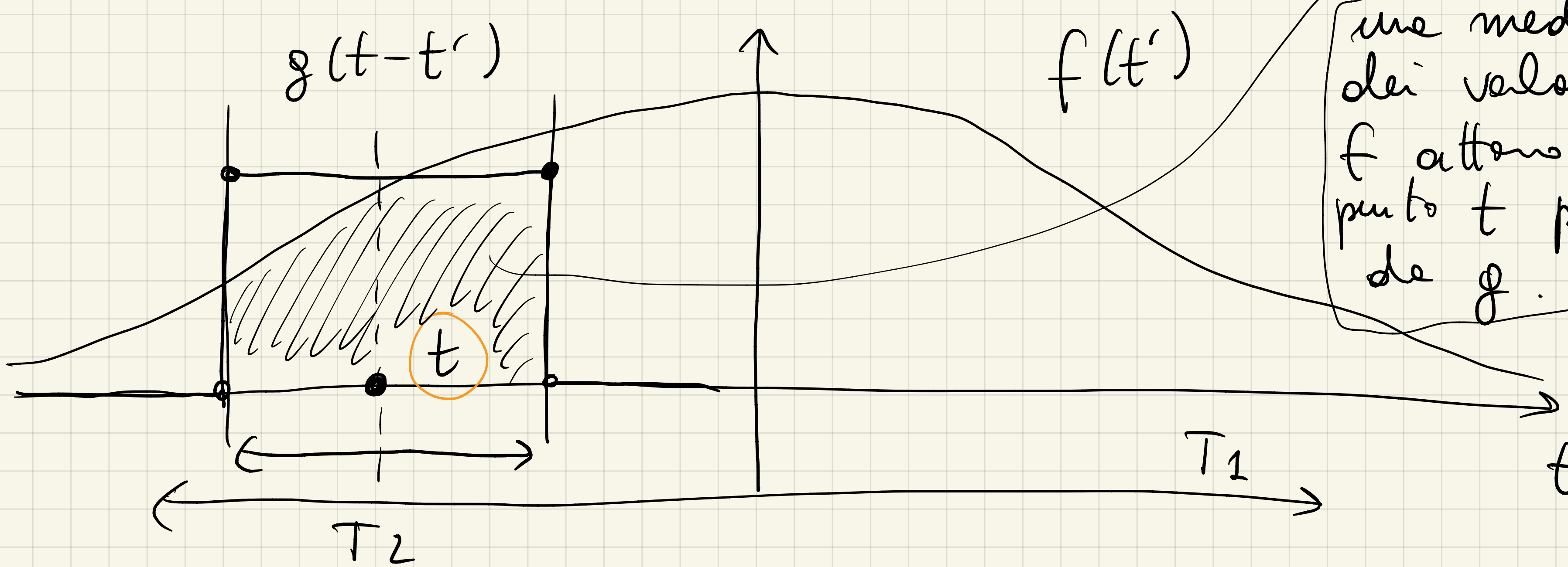
$g(t)\, t^k \in L^1, \ \forall k \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\hat{g}(\omega)$ è derivabile rispetto a ω ∞ volte

$$* \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, f(t') \, g(t-t')$$

<u>Prodotto di</u>
<u>Convoluzione</u> fra funzioni di L^1

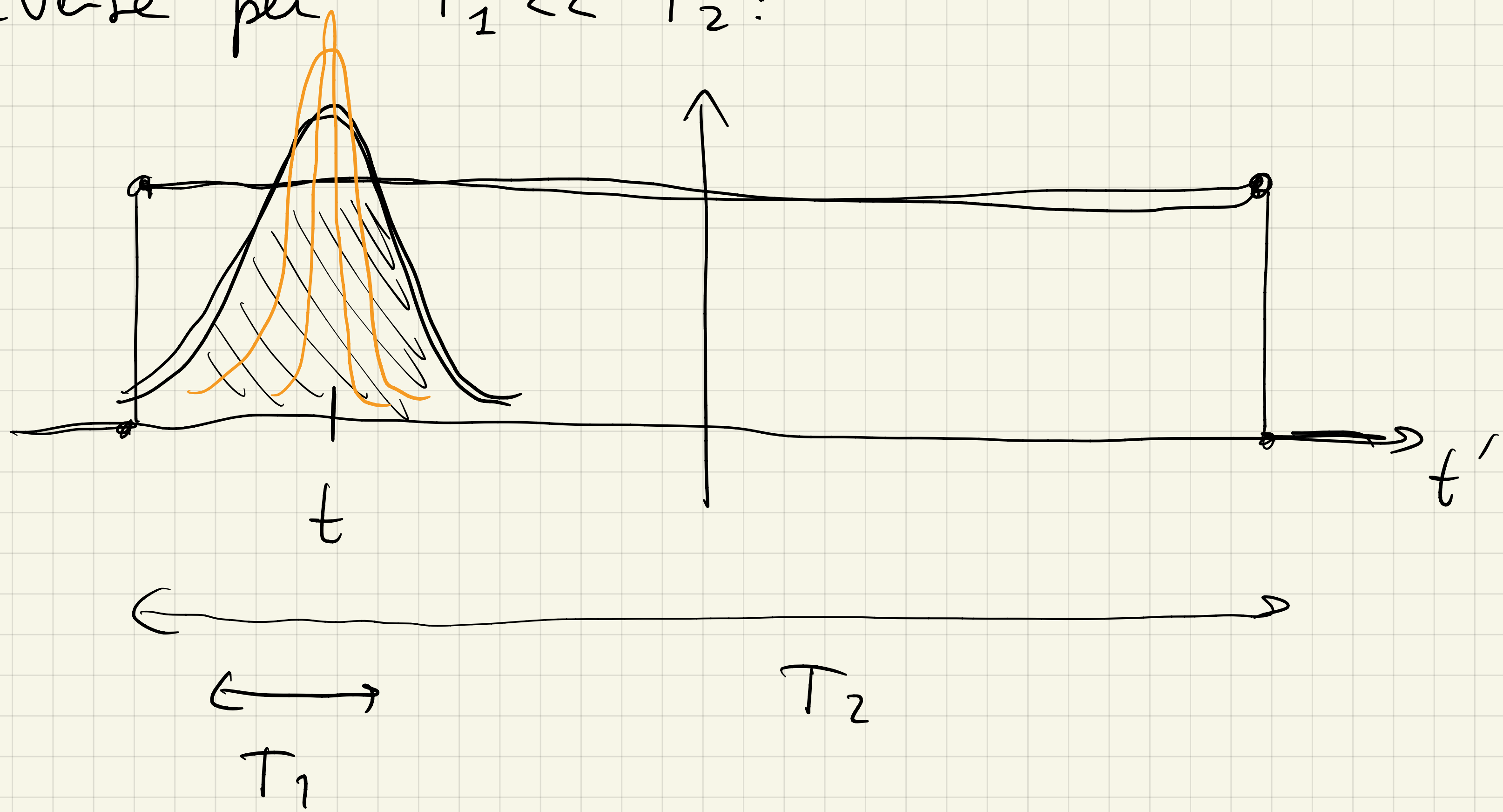
$$f(t) = \frac{1}{t^2 + T_1^2}, \qquad g(t) = \theta(T_2 - |t|)$$

Interpretazione del prodotto $*$: conviene pensarlo nel limite $T_2 \ll T_1$:



Calcoliamo una media dei valori di f attorno al punto t pesati da g.

Viceverse per $T_1 << T_2$:



In ogni caso: $f * g = g * f$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \theta(T_2 - |t-t'|) \frac{1}{(t')^2+T_1^2} = \int_{t-T_2}^{t+T_2} dt' \frac{1}{(t')^2+T_1^2}$$

$$= \frac{1}{T_1}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{t+T_2}{T_1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right)\right).$$

$\boxed{T_1 \to 0: \text{ riproduce la } g(t)}$

Vogliamo verificare:

$$\boxed{\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)}$$

Due modi di procedere:

1) $$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} \frac{1}{T_1}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{t+T_2}{T_1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right)\right).$$

Calcolabile con i metodi di analisi complessa, bisogna riscrivere atan in termini del log complesso. Su Moodle.

2) Trucco: $$\frac{d}{dt}\left(f * g(t)\right) = \overbrace{\frac{1}{T_1^2 + (t+T_2)^2}}^{f(t+T_2)} - \overbrace{\frac{1}{T_1^2 + (t-T_2)^2}}^{f(t-T_2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}(f * g)\right](\omega) = e^{-i\omega T_2} \hat{f}(\omega) - e^{+i\omega T_2} \hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}(f*g)\right](\omega) = e^{-i\omega T_2}\hat{f}(\omega) - e^{+i\omega T_2}\hat{f}(\omega)$$

$$= -2i\sin(\omega T_2) \cdot \hat{f}(\omega).$$

Uso la proprietà della trasformata della derivata:

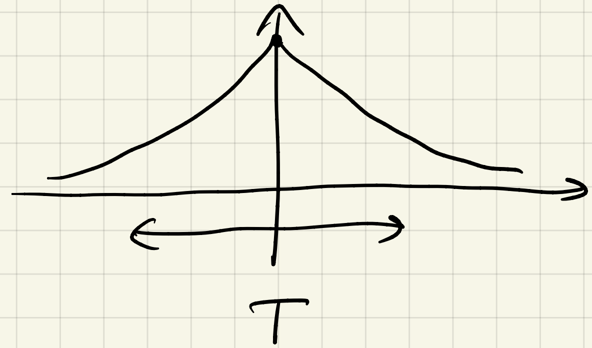
$$\frac{d}{dt} \Rightarrow -i\omega$$

$$-i\omega\,\widehat{f*g}(\omega) = -2i\sin(\omega T_2)\,\hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \widehat{f*g}(\omega) = \boxed{\frac{2}{\omega}\sin(\omega T_2)}\,\hat{f}(\omega)$$

$$= \hat{g}(\omega)\,\hat{f}(\omega).$$

* $f(t) = e^{-|t|/T}$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\, e^{-|t|/T}$$

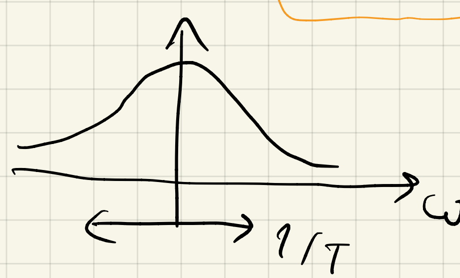
$$= \int_{0}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, e^{-t/T} + \int_{-\infty}^{0} dt\, e^{i\omega t}\, e^{+t/T} \quad t \mapsto -t$$

$$= \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-t\left(\frac{1}{T} - i\omega\right)} + \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-t\left(\frac{1}{T} + i\omega\right)}$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} dt\, e^{-t\alpha} = \frac{1}{\alpha} \qquad \mathrm{Re}[\alpha] > 0}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T} - i\omega} + \frac{1}{\frac{1}{T} + i\omega}$$

$$= \frac{2}{T}\, \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}$$



Osservazione: $T_1 = 1$, $T = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\, e^{-|\omega|} & \text{(primo esempio con } T_1 = 1\text{)} \\[2ex] e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\, \dfrac{1}{1+\omega^2} & \text{(esempio appena visto con } T = 1\text{)} \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\right](t') = \frac{2\pi}{1+(t')^2}$$

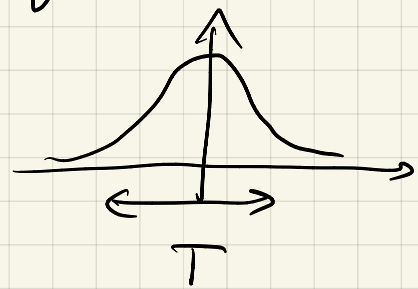
Vedremo più in generale che quando $\mathcal{F}$ si può applicare 2 volte, vale che:

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[f(t)\right]\right](t') = 2\pi f(-t')$$

$R[f(t)] = f(-t)$ $\qquad$ $[\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi R]$

* trasformata di Fourier della Gaussiana:

$$e^{-t^2/T^2} \qquad \text{Gaussiana}$$



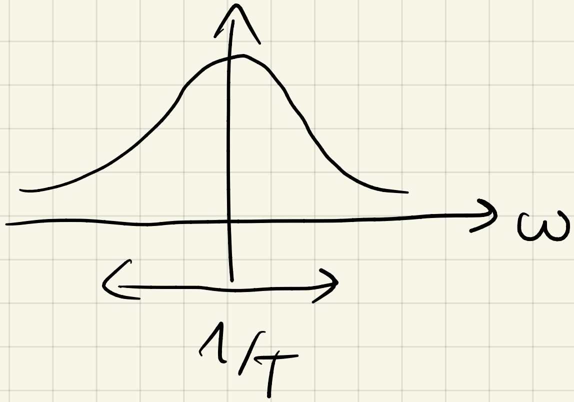
$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/T^2}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \; e^{-\frac{t^2}{T^2} + i\omega t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \; e^{-\left(\frac{t}{T} - i\frac{T\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{iT\omega}{2}\right)^2}$$

$$\frac{t^2}{T^2} - \cancel{2}\frac{t}{\cancel{T}} \, i \frac{\cancel{T}\omega}{\cancel{2}} + \left(\frac{iT\omega}{2}\right)^2$$

$$= e^{-\frac{T^2\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \; e^{-\left(\underbrace{\frac{t}{T} - i\frac{T\omega}{2}}_{x}\right)^2} \qquad dt = T\,dx$$

$$= e^{-\frac{T^2\omega^2}{4}} \, T \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\, T \, e^{-\frac{T^2\omega^2}{4}}$$



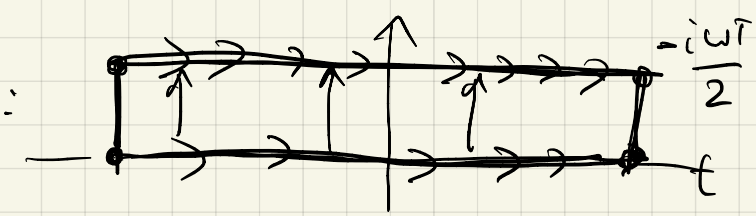
$$e^{-t^2/T^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}\, T\, e^{-\frac{T^2\omega^2}{4}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}\, T \sqrt{\pi}\, \frac{2}{T}\, e^{-\frac{\left(\frac{2}{T}\right)^2 (t')^2}{4}}$$

$$\left(T' = \frac{2}{T} \right)$$

$$= 2\pi\, e^{-\frac{(t')^2}{T^2}}$$

$$\Longrightarrow \left[\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi R \right] \checkmark$$

Per farlo per bene, invece di cambiare variabile dobbiamo deformare il cammino nel piano complesso:



Esercizi per casa:

1) $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\quad f(t) = \dfrac{1}{(t - ia)^n}$

dove $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$\mathcal{F}[f](\omega)$, mostrare che è ancora in $L^1(\mathbb{R})$,

applicare ancora $\mathcal{F}$ e controllare: $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi R$.

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]](t') = 2\pi f(-t').$$

2) $$\left[\frac{df}{dt} + \frac{2t}{T^2} f = 0\right]$$ eq. differenziale per $f(t)$

Trovare eq. differenziale per $\hat{f}(\omega)$ prendendo $\mathcal{F}$ dell'eq. sopra. Usare questo per dedurre che $\mathcal{F}$[Gaussiana] = Gaussiana.