Esercizio 1. *Trovare massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ sulla regione di piano:*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\right\}$$

Soluzione. *L'insieme D è chiuso e limitato pertanto la funzione f ammette su D massimo e minimo. Per trovare i punti stazionari interni a D è sufficiente calcolare dove il gradiente si annulla e verificare se tali punti siano interni a D. Per trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo sul bordo di D utilizzeremo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

Si ha che:

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è data dal solo punto $(0, 0)$. La matrice Hessiana è data da:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per determinare se l'origine sia un punto di massimo o di minimo dobbiamo determinare se la matrice sia definita positiva o definita negativa. Gli autovalori sono le soluzioni della seguente equazione in λ:

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

Gli autovalori sono tutti positivi e pertanto l'origine è un minimo. Allo stesso risultato si poteva giungere osservando che se $y = 0$, $f(x, 0) = x^2 \geq 0$ per ogni x. Se $y \neq 0$ allora

$$f(x, y) = y^2 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right] \stackrel{z=\frac{x}{y}}{=} z^2 + z + 1 > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Il minimo di f su D si realizza nell'origine e vale 0. Dato che non ci sono altri punti stazionari in D il massimo deve realizzarsi sul bordo. Sia $g(x, y) = 0$ con $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ l'equazione del vincolo. Tutti i punti del vincolo sono regolari dato che $\nabla g(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ che non appartiene al vincolo. Definiamo:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^4 + y^4 - 1)$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} 2x + y + 4\lambda x^3 = 0 \\ 2y + x + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due troviamo:

$$\begin{cases} 2x + y + 4\lambda x^3 = 0 \\ 3x + 3y + 4\lambda(x^3 + y^3) = 0 \Leftrightarrow (x + y)[3 + 4\lambda(x^2 - xy + y^2)] = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Una prima soluzione è data da $y = -x$ che sostituita nell'ultima equazione dà:

$$2x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

Abbiamo trovato due punti:

$$P_1 = (\omega, -\omega), P_2 = (-\omega, \omega)$$

con $\omega = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

Se $x + y \neq 0$, il sistema (1) è equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y + 4\lambda x^3 = 0 \\ [3 + 4\lambda(x^2 - xy + y^2)] = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

da cui, ricavando y dalla prima equazione e sostituendo l'espressione così ottenuta nella seconda troviamo:

$$\begin{cases} y = -2x - 4\lambda x^3 \\ 3 + 4\lambda[x^2 - x(-2x - 4\lambda x^3) + (-2x - 4\lambda x^3)^2] = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Semplificando otteniamo:

$$\begin{cases} y = -2x - 4\lambda x^3 \\ 64\lambda^3 x^6 + 80\lambda^2 x^4 + 28\lambda x^2 + 3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

La seconda equazione è una biquadratica in x che ponendo $x^2\lambda = t$ diviene:

$$64t^3 + 80t^2 + 28t + 3 = 0$$

Per tentativi applicando Ruffini si trova che tale equazione ha tre radici reali:

$$t_1 = -\frac{3}{4} \qquad t_2 = t_3 = -\frac{1}{4}$$

Il sistema proposto diviene allora equivalente al seguente:

$$\begin{cases} y = -2x - 4\lambda x^3 \\ x^2\lambda = -\frac{3}{4} \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2x - 4\lambda x^3 \\ x^2\lambda = -\frac{1}{4} \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo:

$$\begin{cases} y = -2x + 3x = x \\ x^2\lambda = -\frac{3}{4} \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2x + x = -x \\ x^2\lambda = -\frac{1}{4} \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

ed infine la prima nell'ultima trovando:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2\lambda = -\frac{3}{4} \\ 2x^4 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ x^2\lambda = -\frac{1}{4} \\ 2x^4 = 1 \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni reali (x, y, λ) sono date da:

$$s_1 = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \qquad s_2 = \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right),$$
$$s_3 = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \quad s_4 = \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

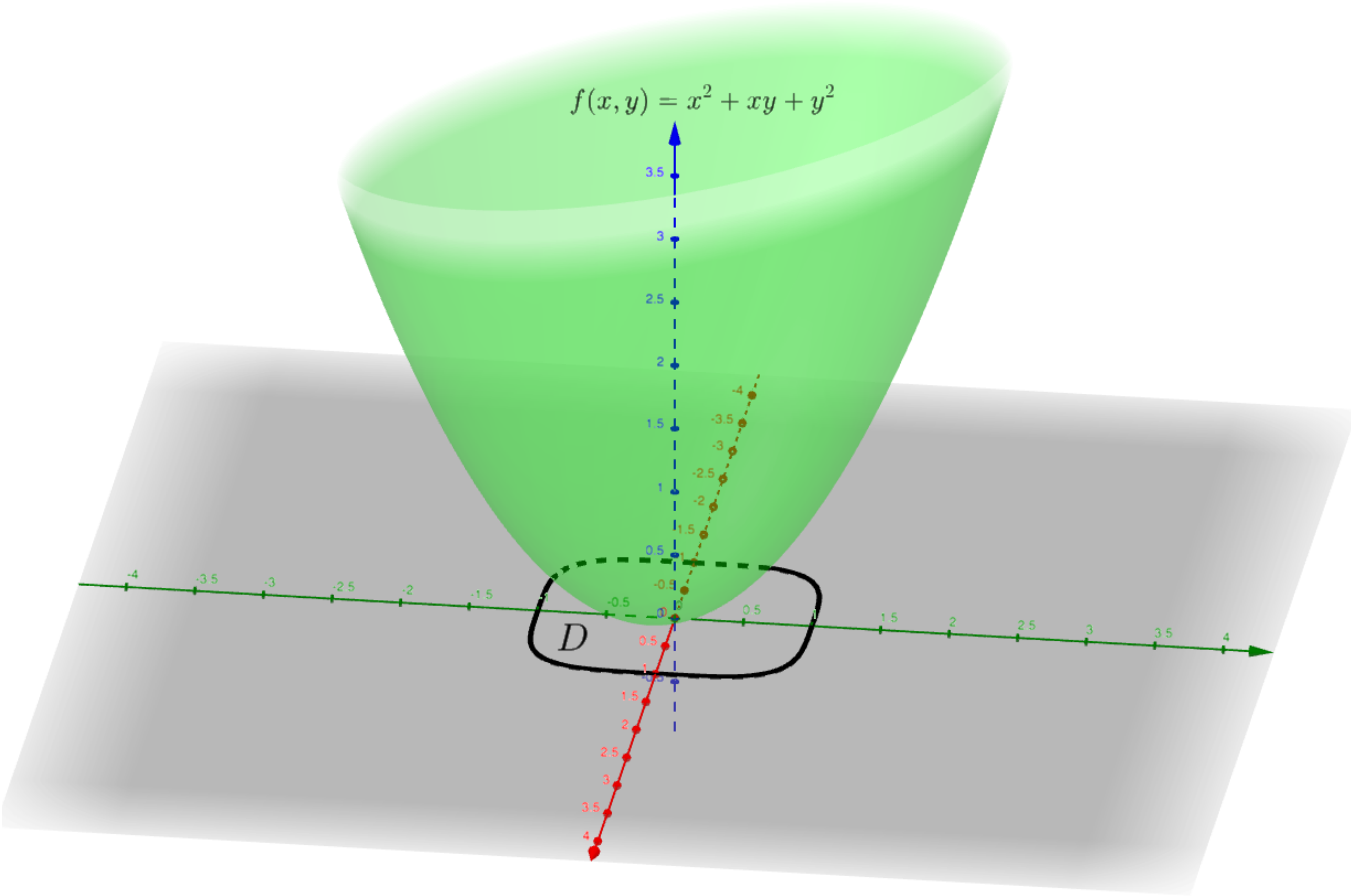
Abbiamo trovato quattro punti:

$$P_3 = (\omega, \omega), P_4 = (-\omega, \omega), P_5 = (\omega, -\omega), P_6 = (-\omega, -\omega)$$

sempre con $\omega = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. Si ha che:

$$f(P_3) = f(P_6) = 3\omega^2 = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$f(P_1) = f(P_2) = f(P_4) = f(P_5) = \omega^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Il minimo di f su D si realizza in $(0, 0)$ e vale 0, il massimo si realizza in P_3 e in P_6 e ivi la funzione vale $3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.



$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
D

Esercizio 2. *Trovare massimi e minimi della funzione $f(x,y,z) = xyz$ sulla curva γ definita da:*

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \wedge x+y = 1\right\}$$

Soluzione. *Posto $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$ ed $h(x,y,z) = x+y-1$, il vincolo si esprime nella forma:*

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che i due vincoli sono regolari dato che $\nabla g(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$, punto che non appartiene al vincolo, mentre $\nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Definiamo:

$$\mathcal{L}(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-4) + \mu(x+y-1)$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-4 = 0 \\ x+y-1 = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema nel seguente modo:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x+y = 1 \end{cases}$$

Ricavando y dall'ultima equazione e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} y = (1-x) \\ (1-x)z + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda(1-x) + \mu = 0 \\ x(1-x) + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + x^2 - 2x + 1 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1-x) \\ z - xz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda - 2\lambda x + \mu = 0 \\ x - x^2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1-x) \\ z - xz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ z + 2\mu + 2\lambda = 0 \\ x - x^2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo ora z dalla terza e sostituiamolo in tutte le rimanenti:

$$\begin{cases} y = (1-x) \\ z = -2(\mu+\lambda) \\ z - xz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ x - x^2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1-x) \\ z = -2(\mu+\lambda) \\ [-2(\mu+\lambda)] - x[-2(\mu+\lambda)] + 2\lambda x + \mu = 0 \\ x - x^2 + 2\lambda[-2(\mu+\lambda)] = 0 \\ 2x^2 - 2x + [-2(\mu+\lambda)]^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Semplifichiamo trovando:

$$\begin{cases} y = (1-x) \\ z = -2(\mu+\lambda) \\ 4x\lambda + 2x\mu - 2\lambda - \mu = 0 \\ x - x^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda^2 = 0 \\ 2x^2 - 2x + 4\mu^2 + 8\lambda\mu + 4\lambda^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Infine sottraendo dalla quinta due volte la quarta e fattorizzando la terza troviamo:

$$\begin{cases} y = (1-x) \\ z = -2(\mu+\lambda) \\ (2x-1)(2\lambda+\mu) = 0 \\ x - x^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda^2 = 0 \\ 4\mu^2 - 4\lambda^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo vari casi:

1. $x = \frac{1}{2}$. *In questo caso* $y = \frac{1}{2}$ *e dal fatto che* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *troviamo* $z = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. *Non serve proseguire i calcoli trovando* λ *e* μ *dato che abbiamo già trovato le coordinate dei punti estremanti che sono:*

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right) \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$$

2. $\mu = -2\lambda$. *Sostituendo nell'ultima equazione troviamo due soluzioni*

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

da cui deduciamo rispettivamente:

$$\mu_1 = -1 \qquad \mu_2 = 1$$

Troviamo ora i valori di x, y, z *corrispondenti a questi valori di* λ *e* μ

- $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, -1)$. *Dalla seconda troviamo* $z = 1$, *dalla quarta,* $x - x^2 + 2 - 1 = 0$ *cioè:*

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

e quindi:

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Abbiamo trovato altri due punti estremanti:

$$P_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \qquad P_4 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$$

Posto $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, *si ha che:*

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

pertanto:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$$

e quindi:

$$P_3 = \left(\varphi, -\frac{1}{\varphi}, 1\right) \qquad P_4 = \left(-\frac{1}{\varphi}, \varphi, 1\right)$$

- $(\lambda, \mu) = (-\frac{1}{2}, 1)$. *Dalla seconda troviamo* $z = -1$, *dalla quarta,* $x - x^2 + 2 - 1 = 0$ *cioè:*

  $$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

  e quindi:

  $$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

  Abbiamo trovato altri due punti estremanti:

  $$P_5 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right) \qquad P_6 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

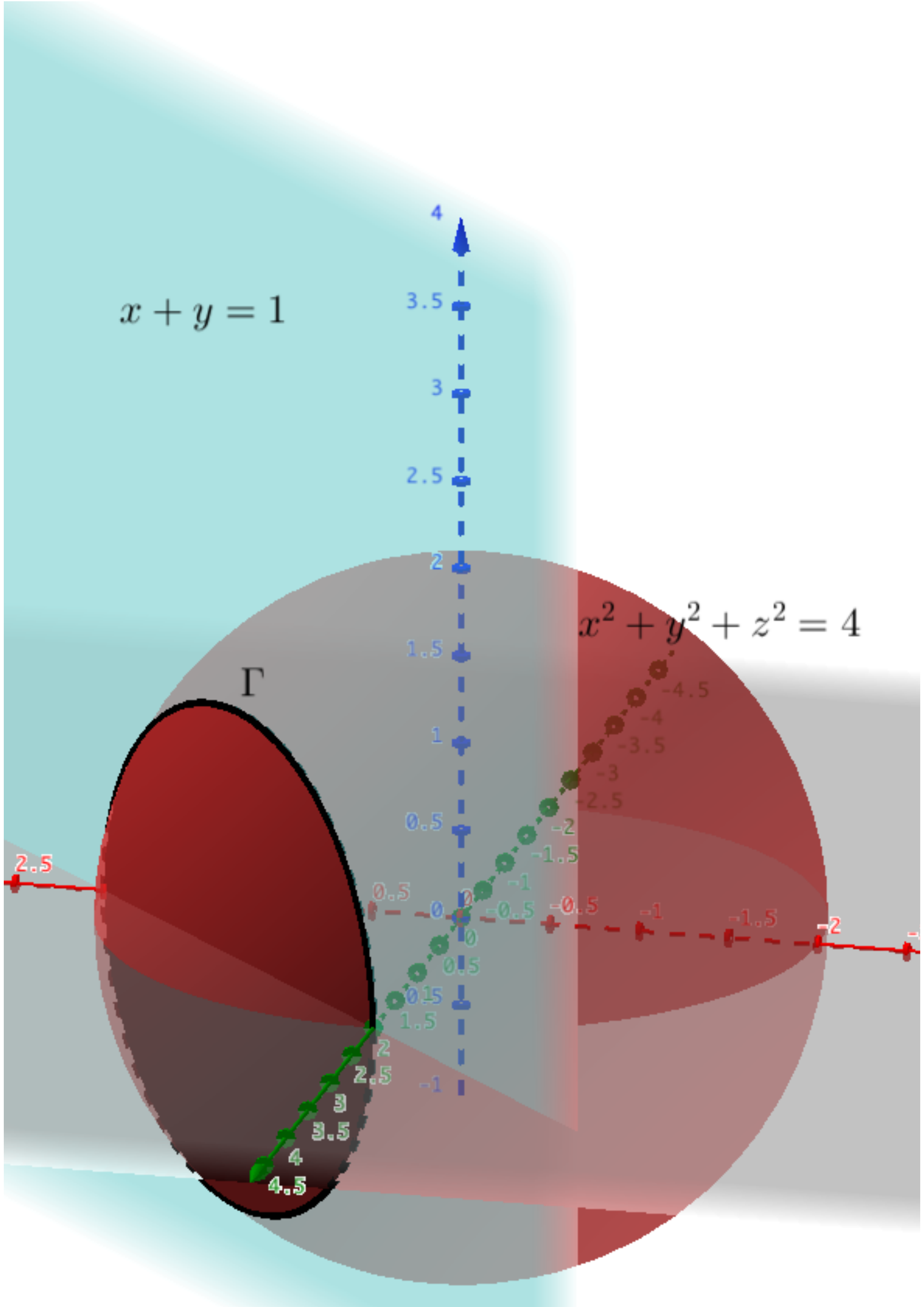
  e quindi:

  $$P_5 = \left(\varphi, -\frac{1}{\varphi}, -1\right) \qquad P_6 = \left(-\frac{1}{\varphi}, \varphi, -1\right)$$

Essendo:

$$f(P_1) = -f(P_2) = \sqrt{\frac{7}{32}} < 1$$
$$f(P_5) = f(P_6) = -f(P_3) = -f(P_4) = 1$$

P_5 *e* P_6 *sono punti di massimo,* P_3 *e* P_4 *sono punti di minimo.*



$x + y = 1$
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
Γ