Def Definiamo con

$$L^2(E) = L^2(E;\mathbb{C}) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} \ : \ \int_E |f|^2 < \infty \right\}$$

Serie di Fourier in $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

1) Teorema di convergenza in $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e $f \in L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

(ossia $\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$)

allora

$$\lim_{N\to\infty} \| f - S_N \|_2 = 0 ,$$

e la serie di Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$

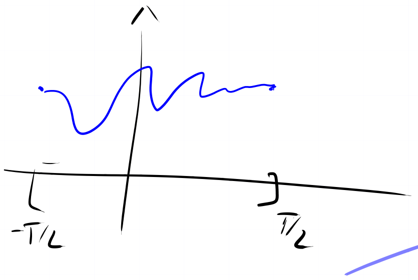
converge q.o. a f in $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$.

Introduzione alla trasformata di Fourier

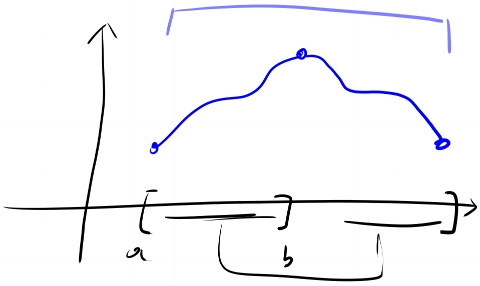
Problema: come generalizzare il concetto di serie di Fourier a funzioni che non sono periodiche?

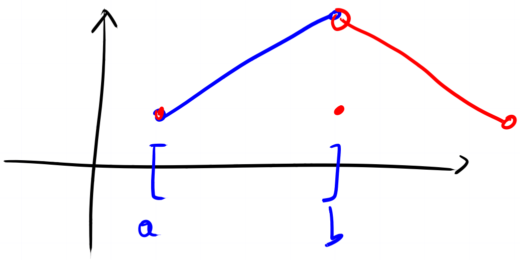
Caso 1: funzioni che sono definite su un intervallo compatto $[a,b]$

Sol 1: estendere periodicamente la funzione al di fuori di $[a,b)$ e procedere come nel caso periodico



I valori di questa estensione sono gli stessi nei 2 estremi





Caso 2 : funzioni definite su tutta la retta reale

Questa parte del corso si propone come obiettivo di rispondere a tale domanda.

Discussione euristica

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Procediamo "formalmente" cioè senza specificare precise ipotesi necessarie e giustificare i passaggi

Sappiamo che $\forall T > 0$ se f è definita in $[-T/2, T/2]$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{in\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \right) e^{in\omega x} \qquad (1)$$

Supponiamo che T sia "grande" ossia $T >> 1$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

Possiamo dunque porre a questo punto

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

Con tale notazione otteniamo dall' equazione (1) che

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \omega\, \hat{f}(n\omega)\, e^{in\omega x}$$

Sappiamo tuttavia che siccome $T >> 1$, $\omega = \frac{2\pi}{T} << 1$

e dunque approssimiamo la somma discreta

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \omega\, \hat{f}(n\omega)\, e^{in\omega x}$$

con l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

e quindi otteniamo che

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

Nel gergo di analisi e sintesi otteniamo il seguente per una funzione definita in $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx \qquad \text{“Analisi”}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \qquad \text{“Sintesi”}$$

$$f \xrightarrow{\text{Analisi}} \hat{f} \xrightarrow[?]{\text{Sintesi}} f$$

Sotto quali ipotesi la sintesi riproduce la funzione di partenza?

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ (ossia $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$) la trasformata di Fourier (FT) è la funzione

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

definita come

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

Osservazione Vista la definizione di $\hat{f}$ potrebbe essere che tale oggetto non sia ben definito nel caso, per esempio che la funzione $x \mapsto f(x)\, e^{-iwx}$ non sia integrabile.

Tuttavia noi assumiamo, per ipotesi, che $\underline{f \in L^1}$, dunque

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\, e^{-iwx}|\, dx$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \overbrace{|e^{-iwx}|}^{=1}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \quad \text{siccome } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Dunque se $f \in L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier $\hat{f}$ è ben definita.

Osservazioni

Dalla formula di Eulero $e^{it} = \cos t + i \sin t$, si ottiene

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\cos(-\omega x) + i \sin(-\omega x)\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x)\, dx .$$

Siccome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ esistono 2 funzioni $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc

$$f(x) = u(x) + i\, v(x)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x) \cos(\omega x) + v(x) \sin(\omega x)\right) dx$$
$$+ i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v(x) \cos(\omega x) - u(x) \sin(\omega x)\right) dx$$

Simmetrie

1) f pari $\rightsquigarrow$ u, v pari, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{v(x)}_{p}\ \underbrace{\sin(\omega x)}_{d}}_{d}\, dx = \int_{-\infty}^{0} v(x) \sin(\omega x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} v(x) \sin(\omega x)\, dx$$

Con il cambio di variabile $y = -x$

$$\int_{-\infty}^{0} v(x) \sin(\omega x)\, dx = -\int_{0}^{+\infty} v(y) \sin(\omega y)\, dy$$

$=$

e dunque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\sin(wx) = 0$

Utilizzando tali conclusioni ottengo la formula semplificata

$$\hat{f}(w) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx \quad \text{e } \hat{f} \text{ è una funzione pari}$$

- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari, risulta che
$$\hat{f}(w) = -2\int_0^{\infty} f(x)\sin(wx)\,dx, \quad \hat{f} \text{ è dispari}$$

Esempi di FT di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$

1) Trasformate di F di una f.c caratteristica di un intervallo compatto

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-iwx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x)\,e^{-iwx}\,dx$$

$$= \int_a^b e^{-iwx}\,dx = \left[-\frac{e^{-iwx}}{iw}\right]_a^b = \frac{1}{iw}\left[e^{-iwa} - e^{-iwb}\right]$$

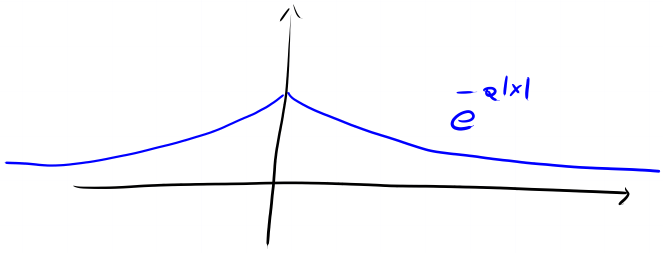
se $w \neq 0$

se $w = 0$ $\quad \hat{f}(0) = \displaystyle\int_a^b 1\,dx = b-a$

Possiamo dunque concludere che

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(w) = \begin{cases} b-a & \text{se } w = 0 \\ \dfrac{1}{iw}\left(e^{-iwa} - e^{-iwb}\right) & \text{se } w \neq 0. \end{cases}$$

• FT della funzione $e^{-a|x|}$ con $a>0$



Consideriamo $f(x) = e^{-a|x|} \rightsquigarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ siccome l'esponenziale è integrabile.

Si ha che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} \, dx \qquad |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ax - i\omega x} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax - i\omega x} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a - i\omega)x} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{a - i\omega} e^{(a-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)x} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega} = \frac{a + \cancel{i\omega} + a - \cancel{i\omega}}{(a - i\omega)(a + i\omega)}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Osservazione

$$f(x) = e^{-a|x|} \xrightarrow{\text{analisi}} \hat{f}(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$\xrightarrow{\text{sintesi}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw$$ e vedere se ritrovo la funzione $f(x)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2a \, \frac{e^{iwx}}{a^2+w^2}\, dw$$