Lemma Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base per X. Allora X è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto basico $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$, cioè tale che $V_i \in \mathcal{B}$ $\forall i \in I$, ammette un sottoricoprimento finito.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ OVVIO.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X.

$\forall i \in I$ $\exists$ un insieme J_i e $\exists$ $B_{ij} \in \mathcal{B}$ t.c.

$U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$ $\rightsquigarrow$ $\{B_{ij}\}_{i,j}$ ricoprimento aperto basico di X $\rightsquigarrow$ $\{B_{i_1 j_1}, \dots, B_{i_n j_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\{B_{ij}\}_{i,j}$ $\Rightarrow$ $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$, perché $B_{i_s j_s} \subset U_{i_s}$ $\forall s = 1, \dots, n$.

Quindi X è compatto.

Teorema $[0,1]$ è compatto.

Dim $[0,1]$ ha una base di intervalli.

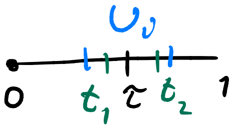
Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto basico di $[0,1]$, con U_i intervallo $\forall i \in I$.

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in [0,1] \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists i_1, \dots, i_n \in I, [0,t] \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\}$$

In altre parole $t \in T \Leftrightarrow [0,t]$ è finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$.

1) T è un intervallo, infatti $\exists\ i_0 \in I$ t.c.
$0 \in U_{i_0} \rightsquigarrow t_0 \in U_{i_0}$, $t_0 > 0 \implies [0, t_0] \subset T$.
Inoltre se $t \in T$ e $0 \leq t' < t \implies t' \in T$.

2) $\sup T = 1$. Infatti, per assurdo, se $\tau := \sup T < 1$
$\rightsquigarrow \exists\ i \in I$ t.c. $\tau \in U_i \implies \exists\ t_1 \in T \cap U_i$
e $\exists\ t_2 \in U_i$, $t_2 > \tau$



$[0, t_2] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \subset [0, t_1] \cup U_i$
finitamente ricoperto $\implies t_2 \in T$ il che contraddice il fatto che $\tau = \sup T$.

3) $1 \in T$. Infatti, consideriamo $i \in I$ t.c.
$1 \in U_i \rightsquigarrow t \in T \cap U_i$
$\implies [0, 1] = [0, t] \cup [t, 1]$ finitamente ricoperto
$\implies 1 \in T$.

Quindi $T = [0, 1]$ è finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$. Quindi $[0, 1]$ è compatto.

Teorema Siano $X_1, \dots, X_n$ spazi compatti.
Allora il prodotto topologico

$$X_1 \times \dots \times X_n$$

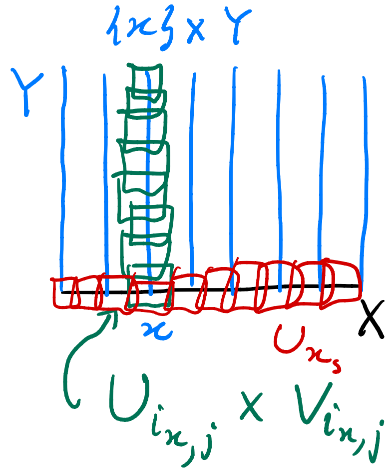
è compatto.

<u>Dim</u> È sufficiente dimostrarlo per il prodotto di due spazi compatti X e Y.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto base di $X \times Y$, con $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ aperti $\forall i \in I$.

$\forall x \in X$, $\{x\} \times Y \cong Y$ è compatto $\Rightarrow$
$\exists \{U_{i_{x,1}} \times V_{i_{x,1}}, \dots, U_{i_{x,n_x}} \times V_{i_{x,n_x}}\}$ sottoricoprimento finito di $\{x\} \times Y \subset X \times Y$, per un certo $n_x \in \mathbb{N}$ e per certi $i_{x,1}, \dots, i_{x,n_x} \in I$.

$\rightsquigarrow U_x \overset{def}{=} \bigcap_{j=1}^{n_x} U_{i_{x,j}} \subset X$ aperto



$x \in U_x \rightsquigarrow \{U_x\}_{x\in X}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow \{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow$

$\{U_{i_{x_s,j}} \times V_{i_{x_s,j}}\}_{\substack{s=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n_{x_s}}}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$.

Vale il seguente teorema che non dimostriamo.

<u>**Teorema di Tychonoff.**</u> Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi compatti. Allora il prodotto topologico $X = \prod_{i\in I} X_i$ è compatto.

Corollario $[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n \text{ volte}}$ è compatto.

Teorema di Heine-Borel Un sottospazio $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ K chiuso perché $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff.

$\{U_j = K \cap B(0;j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ricoprimento aperto di K

$\Rightarrow \exists \{U_{j_1}, \dots, U_{j_h}\}$ sottoricoprimento finito

$\Rightarrow K \subset B(0;r)$, $r = \max(j_1, \dots, j_h)$

$\Rightarrow K$ limitato.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato $\Rightarrow$

$\exists\, r > 0$ t.c. $K \subset B(0;r) \subset [-r,r]^n \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow K$ chiuso in $[-r,r]^n$. Ma $[-r,r]^n \cong [0,1]^n$ è compatto $\Rightarrow K$ compatto.

Corollario B^n, S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ sono compatti.

Dim $B^n \subset \mathbb{R}^n$ e $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ chiusi e limitati.

$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ prodotto di compatti.

$$\left.\begin{aligned} \pi &: S^n \to \mathbb{R}P^n \\ \pi &: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \end{aligned}\right\} \text{ continue e suriettive.}$$

Corollario La striscia di Möbius Mb, la bottiglia di Klein Kl e il cilindro $S^1 \times [0,1]$ sono compatti.

Dim $S^1 \times [0,1]$ è prodotto di compatti.
Mb e Kl sono quozienti del quadrato $[0,1]^2$ che è compatto.