ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 5

Trieste, 21 novembre 2021

1. (a) Verificare che le seguenti sono basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente:
   $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$,
   $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$ con $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (1, 0)$.

   (b) Sia f la seguente applicazione: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
   $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$
   Verificare che f è lineare, determinare i corrispondenti in f dei vettori della base canonica e dei vettori di $\mathcal{B}$, scrivere tali vettori come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}'$.

   (c) Determinare il rango, una base dell'immagine e una base del nucleo di f.

2. Usando il Teorema della dimensione e il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare, in ciascuno dei tre casi seguenti determinare, se esistono, applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate; nel caso in cui ne esista più d'una, trovarne almeno due distinte.
   (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f =< (1, 0, 1, 0) >$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im}(g) =< (1, 1) >$;
   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im}(h) =< (v_1, v_2) >$ con $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 2, 0)$.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione fra K-spazi vettoriali. Il grafico di f è il sottinsieme di $V \times W$ così definito: $\Gamma_f = \{(v, w) \in V \times W \mid w = f(v), v \in V\}$. Dimostrare che f è lineare se e solo se Γ_f è sottospazio vettoriale di $V \times W$ (con la struttura di spazio vettoriale definita nel Foglio 2, Es. 3).

4. In $\mathbb{R}^5$ si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai seguenti vettori: $v_1 = (1, 2, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3, -1, -1)$, $v_3 = (1, 3, 3, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, -6, 3, 3)$, $v_5 = (2, 3, -3, 3, 3)$.
   (a) Estrarre da $v_1, \dots, v_5$ una base $\mathcal{B}_W$ di W e determinare $\dim W$.
   (b) Completare $\mathcal{B}_W$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^5$.
   (c) Applicando il teorema di determinazione di un'applicazione lineare, costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ avente W come nucleo.