Compattificazione di Alexandroff

Def Uno spazio topologico X è detto <u>localmente compatto</u> se ogni punto di X ha un intorno compatto.

Es 1) $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{B}(x;1) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq 1 \}$ intorno compatto di x.

2) X compatto $\Rightarrow$ X loc. compatto

Teorema di Alexandroff Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e non compatto. Allora esiste uno spazio <u>compatto di Hausdorff</u> $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, ottenuto aggiungendo un punto ∞ a X, tale che l'inclusione $i : X \to \hat{X}$ sia un'immersione aperta.

Dim Definiamo la topologia di $\hat{X}$ nel modo seguente:

$U \subset \hat{X}$ è aperto $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ vale (a) oppure (b)

(a) $U \subset X$ è aperto in X, oppure

(b) $\infty \in U$ e $\hat{X} - U \subset X$ è compatto.

Mostriamo che questa è effettivamente una topologia su $\hat{X}$.

i) ϕ è aperto per (a), $\hat{X}$ aperto per (b);

ii) $U_i \subset \hat{X}$ aperto $\forall\, i \in I \rightsquigarrow I = I_0 \sqcup I_\infty$ t.c.

$U_i \subset X$ aperto in X $\forall\, i \in I_0$

$\infty \in U_i$ $\forall\, i \in I_\infty \Rightarrow \hat{X} - U_i = K_i \subset X$ cpt

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \Big(\bigcup_{i\in I_0} U_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I_\infty} U_i\Big) = U \cup V$$

dove $U = \bigcup_{i\in I_0} U_i$ e $V = \bigcup_{i\in I_\infty} U_i = \hat{X} - \bigcap_{i\in I_\infty} K_i$

Se $I_\infty = \emptyset$ allora $\bigcup_{i \in I} U_i = U \subset X$ è aperto.

Se $I_\infty \neq \emptyset$ allora $\hat{X} - V = \bigcap_{i\in I_\infty} K_i =: K$

e $K_i \subset X$ è compatto quindi chiuso (X è T_2) $\forall i$

$\Rightarrow K$ chiuso in $K_i \Rightarrow K$ compatto $\Rightarrow V$ aperto.

$$X - (U \cup V) = (X - U) \cap (X - V) \subset X - V = K$$

$X - U$ chiuso in X perché $U \subset X$ aperto

$X - V = K$ chiuso in X

$\Rightarrow X - (U \cup V) \subset K$ chiuso $\Rightarrow$ compatto

Dunque $\bigcup_{i\in I} U_i$ è aperto in $\hat{X}$.

iii) $U, V \subset \hat{X}$ aperti, abbiamo tre casi:

- $U, V \subset X$ aperti $\Rightarrow U \cap V \subset X$ aperto;
- $\infty \in U \cap V \Rightarrow \hat{X} - (U \cap V) = (\hat{X} - U) \cup (\hat{X} - V)$
  compatto perché unione finita di compatti;

- $U \subset X$ e $\infty \in V \Rightarrow X - V \subset X$ compatto
$\Rightarrow X - V$ chiuso in X perché X è T_2
$\Rightarrow V - \{\infty\} = V \cap X$ aperto in $X \Rightarrow$
$U \cap V = U \cap (V - \{\infty\})$ aperto in X.
$\Rightarrow U \cap V$ aperto in $\hat{X}$.

Quindi resta definita una topologia su $\hat{X}$.

Mostriamo che $\hat{X}$ è compatto.
$\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di $\hat{X}$ $\rightsquigarrow$

$\exists\ i_\infty \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_\infty}$
$K = \hat{X} - U_{i_\infty} \subset X$ compatto $\Rightarrow \exists\ i_1, \dots, i_n \in I$ t.c.
$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \Rightarrow \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_{i_\infty}\}$
sottoricoprimento finito.

Mostriamo che $\hat{X}$ è di Hausdorff.
Siano $x, y \in \hat{X}$, $x \neq y \rightsquigarrow$ due casi:

- $x, y \in X \Rightarrow \exists\ U, V \subset X$ aperti in X quindi in $\hat{X}$
t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \phi$

- $x \in X$, $y = \infty \Rightarrow \exists\ J \subset X$ intorno compatto
di x (X è loc. compatto) $\rightsquigarrow$
$U = \mathrm{Int}_X J$, $V = \hat{X} - J$ aperti in $\hat{X}$ t.c.
$x \in U$, $\infty \in V$, $U \cap V = \phi$.

Quindi $\hat{X}$ è di Hausdorff.
$i : X \hookrightarrow \hat{X}$ immersione aperta è immediato $\boxed{E}$

Def $\hat{X}$ è detto <u>compattificazione di Alexandroff</u> (o <u>compattificazione con un punto</u>) di X. ∞ è detto <u>punto all'infinito</u> di $\hat{X}$.

Def Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Diciamo che f è <u>propria</u> se $f^{-1}(K) \subset X$ è compatto per ogni compatto $K \subset Y$.

OSS $f: X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow$ f propria.

Teorema Siano X e Y spazi di Hausdorff loc. compatti e non compatti. Sia $f: X \to Y$ continua e propria. Allora esiste un'unica applicazione continua $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{Y}$ che estende f. Inoltre se f è un omeomorfismo, allora $\hat{f}$ è un omeomorfismo.

Dim Siano $\infty_X \in \hat{X}$ e $\infty_Y \in \hat{Y}$ i rispettivi punti all'infinito.

<u>Esistenza:</u> $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{Y}$, $\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \infty_Y & \text{se } x = \infty_X \end{cases}$

$V \subset \hat{Y}$ aperto $\Rightarrow$ (a) oppure (b):

(a) $V \subset Y$ aperto in $Y \Rightarrow \hat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subset X$
aperto in $X \Rightarrow \hat{f}^{-1}(V)$ aperto in $\hat{X}$

(b) $\infty_Y \in V \Rightarrow \infty_X \in \hat{f}^{-1}(V)$

$$\hat{X} - \hat{f}^{-1}(V) = \hat{f}^{-1}(\hat{Y} - V) = f^{-1}(Y - V)$$

compatto perché f è propria $\Rightarrow \hat{f}^{-1}(V)$ aperto in $\hat{X}$.

Quindi f è continua.

<u>Unicità</u>: per assurdo, sia $g : \hat{X} \to \hat{Y}$ un'altra estensione continua di f, $g \neq \hat{f} \Rightarrow g(\infty_X) = y \in Y \Rightarrow$
$\exists\, V \subset Y$ intorno compatto di y in $Y \Rightarrow$
$g^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup \{\infty_X\}$ intorno di ∞_X in X

Ma $f^{-1}(V) \subset X$ è compatto perché f è propria $\Rightarrow$
$U = \hat{X} - f^{-1}(V)$ aperto in $\hat{X}$ e $\infty_X \in U \Rightarrow$
U intorno di ∞_X in $\hat{X}$
$g^{-1}(V) \cap U = \{\infty_X\} \Rightarrow \{\infty_X\}$ aperto in $\hat{X}$
$\Rightarrow X = \hat{X} - \{\infty_X\}$ chiuso in $\hat{X} \Rightarrow X$ compatto, contraddizione.
Quindi $\hat{f}$ è l'unica estensione continua di f.

Teorema Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e non compatto, e sia X' uno spazio compatto di Hausdorff tale che $X' - \{a\} \cong X$ per un certo $a \in X'$. Allora $X' \cong \hat{X}$.
In particolare, la compattificazione di Alexandroff di X è unica a meno di omeomorfismi.

Dim $Y := X' - \{a\} \cong X$ è T_2, loc. compatto e non compatto. Inoltre Y è aperto in X'.
$U \subset X'$ è aperto $\iff$ $X' - U$ è chiuso in X'
$\iff$ $X' - U$ è compatto (perché X' è compatto).
Quindi

$$j : X' \longrightarrow \hat{Y}, \quad j(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in Y \\ \infty_Y & \text{se } y = a \end{cases}$$

j è biiettiva e continua $\boxed{E}$
$\Rightarrow$ j omeo (perché X' compatto e $\hat{Y}$ T_2).

Sia $f : Y \xrightarrow{\cong} X$ omeo $\rightsquigarrow$ $\hat{f} : \hat{Y} \xrightarrow{\cong} \hat{X}$ omeo

$\Rightarrow$ $\hat{f} \circ j : X' \xrightarrow{\cong} X$ omeo t.c. $(\hat{f} \circ j)(a) = \infty_X$.

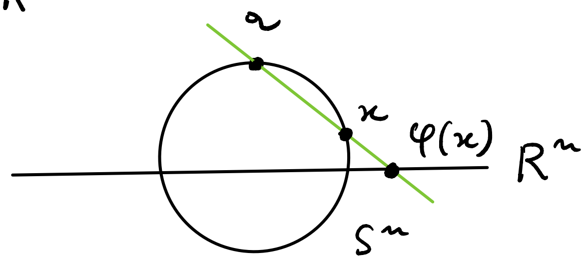
Teorema $\hat{R}^n \cong S^n$

Dim Poniamo $a = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$

$\varphi : S^n - \{a\} \longrightarrow R^n$ omeo $\boxed{E}$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n)$$

$\overline{ax} : y = t(x - a) + a \,, t \in R$



$$t(x_{n+1} - 1) + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$

Quindi $S^n \cong \hat{R}^n$.

Def L'omeomorfismo $\varphi : S^n - \{a\} \longrightarrow R^n$ definito sopra è detto <u>proiezione stereografica</u> (dal polo nord).

Corollario $RP^1 \cong S^1$ e $CP^1 \cong S^2$.

Dim Dimostriamolo nel caso complesso (nel caso reale si procede in modo analogo).

$a = [0, 1] \in CP^1 \rightsquigarrow CP^1 - \{a\} \cong C$ (carta affine)

$\Rightarrow CP^1 \cong \hat{C} \cong \hat{R}^2 \cong S^2$ perché $C \cong R^2$.