22 Novembre

Integrale di Riemann

Definizione (Somme di Riemann)

Dato $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e data una decomposizione

$\Delta \qquad x_0 = a < \cdots < x_n = b$

e scelto $\forall$ intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ un elemento $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ resta definita la somma di Riemann

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1})$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$s(\Delta) \le \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) \le S(\Delta)$$

$\Delta \qquad x_0 = a < \dots < x_n = b$

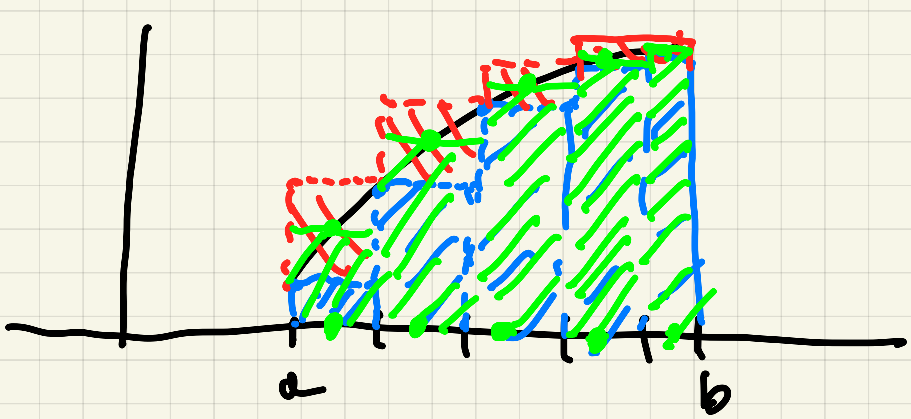
e scelto $\forall$ intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ un elemento $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ resta definita la somma di Riemann

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\,(x_j - x_{j-1})$$

Def. Una $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile per Riemann, con integrale $A\in\mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$ t.c. per ogni decomposizione Δ di calibro $|\Delta|<\delta_\varepsilon$ e per ogni somma di Riemann associata a Δ ho

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (x_j-x_{j-1})\, f(x_j^*) - A\right| < \varepsilon.$$

A è l'integrale di Riemann di f in $[a,b]$.



Teor

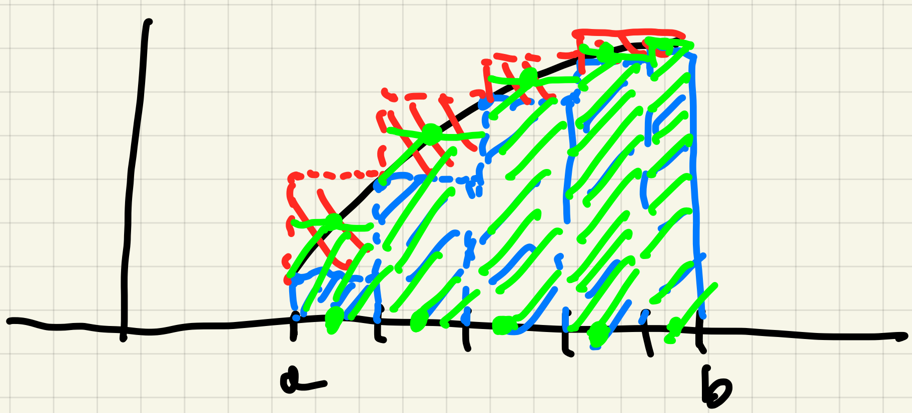
1) Se una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è limitata ed è integrabile per Darboux, allora è integrabile anche per Riemann e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

, dove A è l'integrale di Riemann di f in $[a,b]$.

2) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile per Riemann, con integrale di Riemann A, è anche una funzione limitata in $[a,b]$ ed è integrabile per Darboux e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

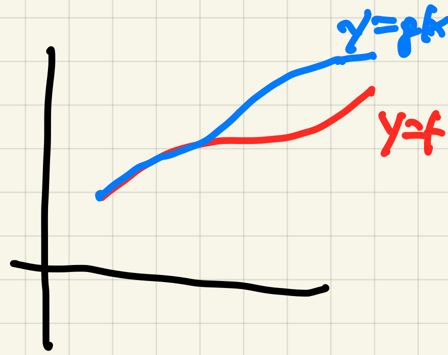


Teor (Monotonia) Date due funzioni $f, g \in L[a,b]$ t.c. $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ si ha

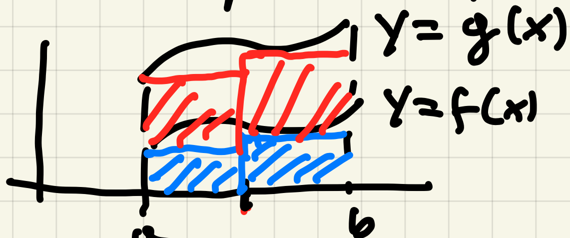
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

In particolare se $f, g \in C^0([a,b])$ allora se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e se le due funzioni sono distinte, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$



Dim ad esempio la prima parte



Presa $\Delta : x_0 = a < \dots < x_n = b$

$$s_f(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$s_g(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf g([x_{j-1}, x_j])$$

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \inf f([x_{j-1}, x_j]) \le \inf g([x_{j-1}, x_j])$$

Cioè $\forall \Delta$ ho $s_f(\Delta) \le s_g(\Delta)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_\Delta s_f(\Delta) \le \sup_\Delta s_g(\Delta) = \int_a^b g(x)\,dx$$

Def Data $f \in L[a,b]$ la sua media è
$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Corollario Data $f \in C^0([a,b])$ $\exists$ $c \in [a,b]$ t.c.
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Dim $f \in C^0([a,b]) \overset{\text{per Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists$ x_m e x_M t.c.
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b].$$

Per la monotonia dell'integrale
$$\int_a^b f(x_m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_M)\,dx$$
$$f(x_m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_M)(b-a)$$
$$f(x_m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_M)$$

x_m ed x_M sono estremi di un intervallo e per il teor dei valori intermedi $\exists$ c nell'intervallo di estremi x_m e x_M con
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =: \fint_a^b f(x)\,dx$$

Teor (disug triangolare) Se $f \in L[a,b]$ allora $|f| \in L[a,b]$ e si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad *$$

Dim di * Diamo per scontato la prima parte e siano $f(x)$ e $|f(x)|$ due funzioni in $L[a,b]$.

Allora $$|f(x)| \le |f(x)|$$

$$\iff \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

Applichiamo $\int_a^b \cdot$ all'ultima riga, e per la monotonia

$$\int_a^b \left(-|f(x)|\right)dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Per la linearità dell'integrale

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Updownarrow$$

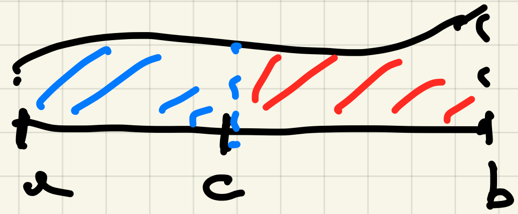
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad *$$

* è una "versione" della disuguaglianza

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |x_j|$$

Lemma Sia $f \in L[a,b]$ e sia $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Allora la restrizione di f in $[\alpha,\beta]$ è in $L[\alpha,\beta]$.

Teor (Chasles) Dati $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $c\in(a,b)$, sono equivalenti:



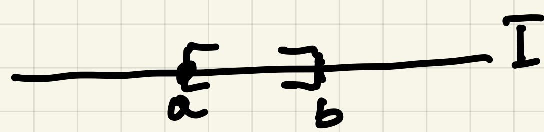
1) $f \in L[a,b]$

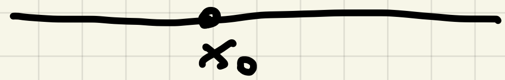
2) $f \in L[a,c]$ e $f \in L[c,b]$

Inoltre, quando 1) e 2) sono vere si ha

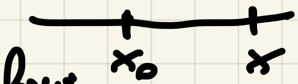
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Def (Locale integrabilità) Sia I un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è localmente integrabile in I, e scriviamo che $f \in L_{loc}(I)$, se $\forall$ coppia a e b in I con $a<b$, allora se $f \in L[a,b]$.

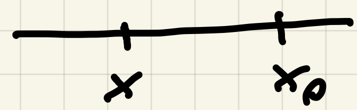




Def Sia $f \in L_{loc}(I)$
e sia $x_0 \in I$. Definiamo $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt : I \longrightarrow \mathbb{R}$



$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \text{è l'integrale di Darboux di } f \text{ in } [x_0,x] & \text{se } x > x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \\ -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

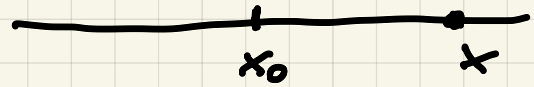


Lemma Se $f \in L_{loc}(I)$ allora

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \in C^0(I).$$

Teor Sia $f \in L_{loc}(I)$ e sia $x_0 \in I$. Definiamo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$



Supponiamo che in un punto x esiste

$$\lim_{y \to x^+} f(y) = f(x^+) \quad \text{e che sia } f(x^+) \in \mathbb{R}.$$

Allora $$F'_d(x) = f(x^+)$$

Analogamente se $\lim_{y \to x^-} f(x) = f(x^-)$ e se $f(x^-) \in \mathbb{R}$,

allora $$F'_s(x) = f(x^-)$$

In particolare se $f(x^-) = f(x^+)$ si ha

$$F'(x) = f(x^+) = f(x^-)$$

In particolare, nei punti x dove f è continua, e quindi dove $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$, si ha

$$F'(x) = f(x).$$

Corollario Se $f \in C^0(I)$ si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$