$f(x) = x - \operatorname{sen}(e^x - 1) \qquad x_0 = 0 \qquad x_0 = +\infty$

$x_0 = 0 \qquad f'(x) = 1 - \cos(e^x - 1)\, e^x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1) \cdot e^{2x} - \cos(e^x - 1) \cdot e^x \qquad f''(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_0 f = 2$

$x_0 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(e^x - 1)}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1)}{x} = 1 \qquad \operatorname{Ord}_{+\infty} f = 1$

$\alpha = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \frac{f(x)}{x^\alpha}$

$\text{si} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad \frac{g(x)}{\frac{1}{x^\alpha}}$

$f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 3x^{5/2}$ $\qquad 0 \qquad +\infty$

$x_0 = 0$

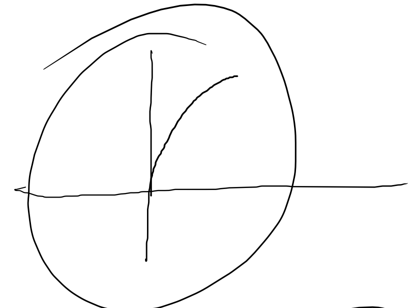
$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} + \frac{x^2}{x^\alpha} + 3\frac{x^{5/2}}{x^\alpha}$$

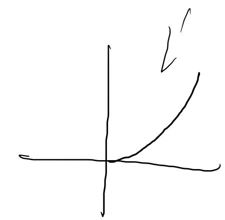
$\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} \to 1$, $\quad \frac{x^2}{x^\alpha} + 3\frac{x^{5/2}}{x^\alpha} \to 0$

$\alpha = 1$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 3x^{3/2}$ $\qquad$ ($\frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$; $x \to 0$; $3x^{3/2} \to 0$)

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad 1$

$$\boxed{\mathrm{ord}_0 f = 1/2}$$





$x_0 = +\infty$

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} + \frac{x^2}{x^\alpha} + 3\frac{x^{5/2}}{x^\alpha}$$

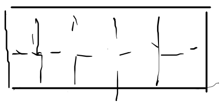
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3$$

$\alpha = 5/2$

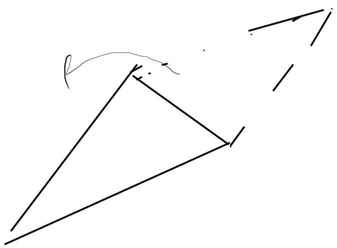
$\mathrm{ord}_{+\infty} f = \frac{5}{2}$

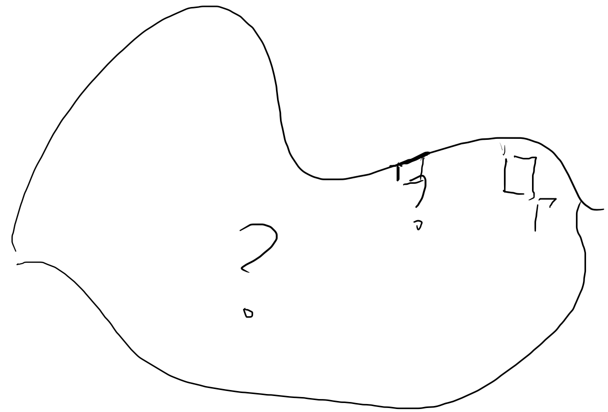
$$f(x) = x^3 \left(e^{x^3} - \operatorname{sen}(x^7) \right)$$

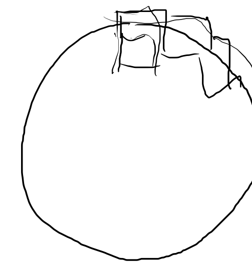
Misura di una regione piana



Area $b \cdot h$







$I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ $\boxed{f: I \to \mathbb{R} \quad f \text{ limitata}}$

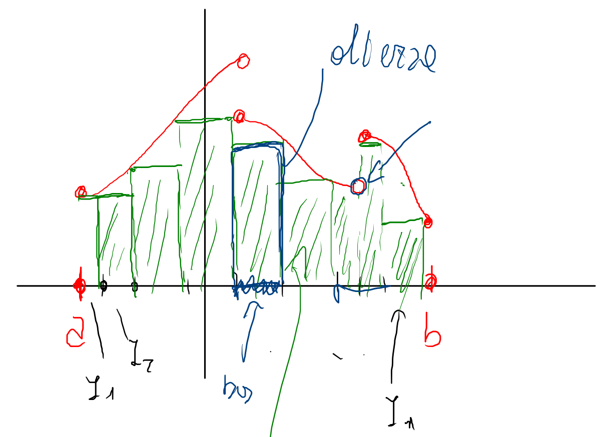
Diremo decomposizione di I un insieme di sottointervalli di I del tipo

$$S = \{ I_1, I_2, I_3, \dots, I_n \}$$

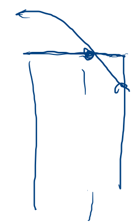
$$I_1 = [a, x_1] \quad I_2 = [x_1, x_2] \quad I_3 = [x_2, x_3] \quad \dots$$

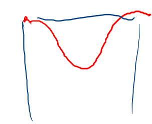
$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \dots \quad I_n = [x_{n-1}, b]$$

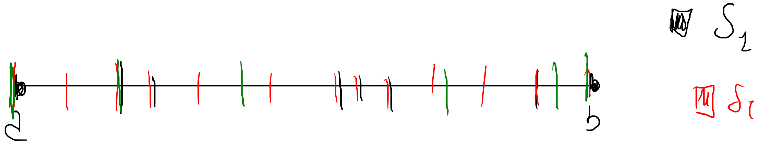
gli x_i si dicono i nodi della decomposizione



l'area del "trapezoide" di [illegible] sopra l'asse x e sotto il grafico è la somma delle aree dei rettangoli







Siano S_1, S_2 due decomposizioni di I. Diremo che S_2 è più fine di S_1

$[S_2 \leq S_1]$ se ogni nodo di S_1 è anche un nodo di S_2

Osservazione: siano S_1 e S_2 due decomposizioni, non è detto che S_1 e S_2 siano confrontabili rispetto questa relazione.

Però, esiste sempre una decomposizione S_3 più fine di entrambe S_1 e S_2.

[basta prendere l'unione dei nodi]

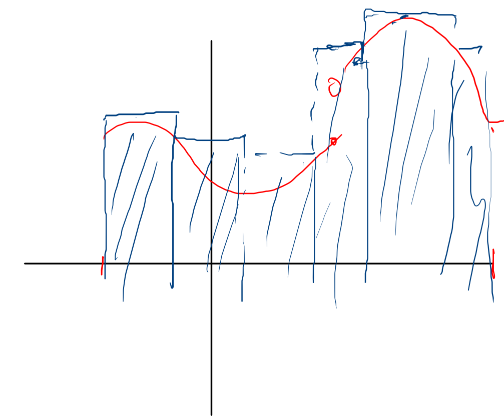
Diremo somma inferiore di f rispetto alla decomposizione S il numero

$$s(f, S) = \sum_{k=0}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

altezza base

somma superiore di f rispetto a S il numero

$$S(f, S) = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in I_k} f(x) \, (x_k - x_{k-1})$$



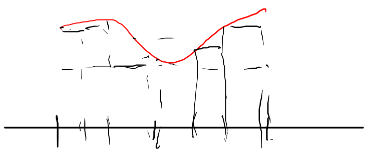
Osservazione: $\forall\, \delta_1, \delta_2$ decomposizioni di I si ha

$$s(f, \delta_1) \leq S(f, \delta_2)$$

Dim: se $\delta_1 = \delta_2$ si ha $\inf_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f$ e quindi $s(f, \delta_1) \leq S(f, \delta_1)$

sia δ_1 più fine di δ_2, si ha $s(f, \delta_1) \geq s(f, \delta_2)$

$$S(f, \delta_1) \leq S(f, \delta_2)$$



siano δ_1 e δ_2 qualsiasi; esiste δ_3 più fine di entrambe; allora si ha

$$s(f, \delta_1) \leq s(f, \delta_3) \leq S(f, \delta_3) \leq S(f, \delta_2)$$

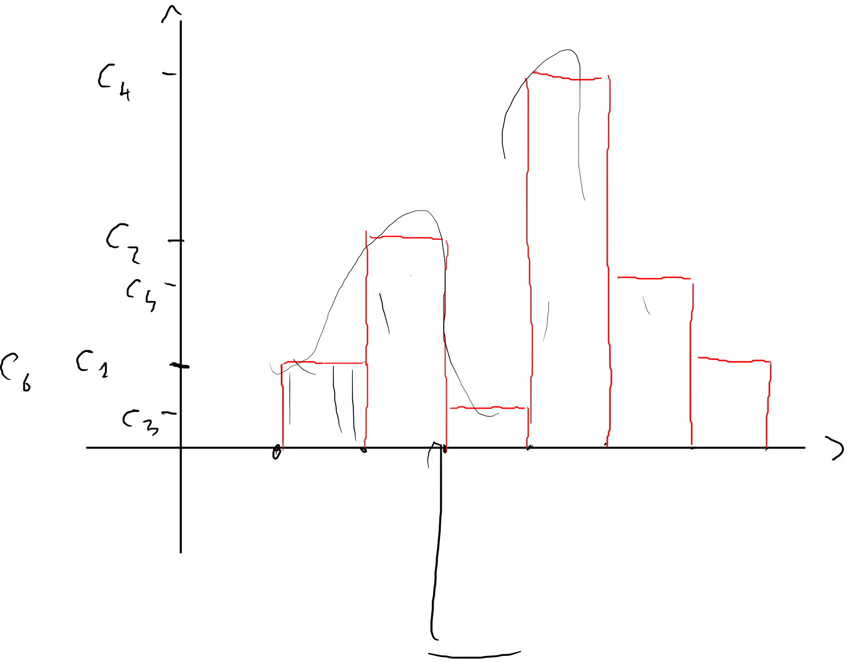
Quindi gli insiemi $A = \{$somme inferiori$\}$ e $B = \{$somme superiori$\}$ sono separati in $\mathbb{R}$.

A è limitato superiormente; diremo <u>integrale inferiore</u> di f su I il numero

$$\int^{-}_{[a,b]} f \, dm = \sup A$$

B è limitato inferiormente, diremo <u>integrale superiore</u> di f su I il numero

$$\int^{+}_{[a,b]} f \, dm = \inf B.$$



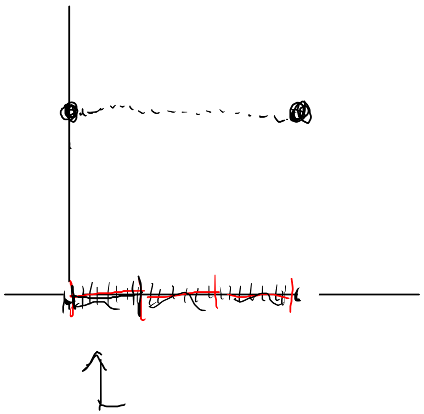
$$f(x) = \begin{cases} c_1 & I_1 \\ c_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ c_6 & \end{cases}$$

$$\text{Area} = \sum_{k=1}^{6} c_k \cdot m(I_k)$$

m = "misura"

$$\sum \sim \int_{[a,b]} f(x)\, dm$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \forall x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

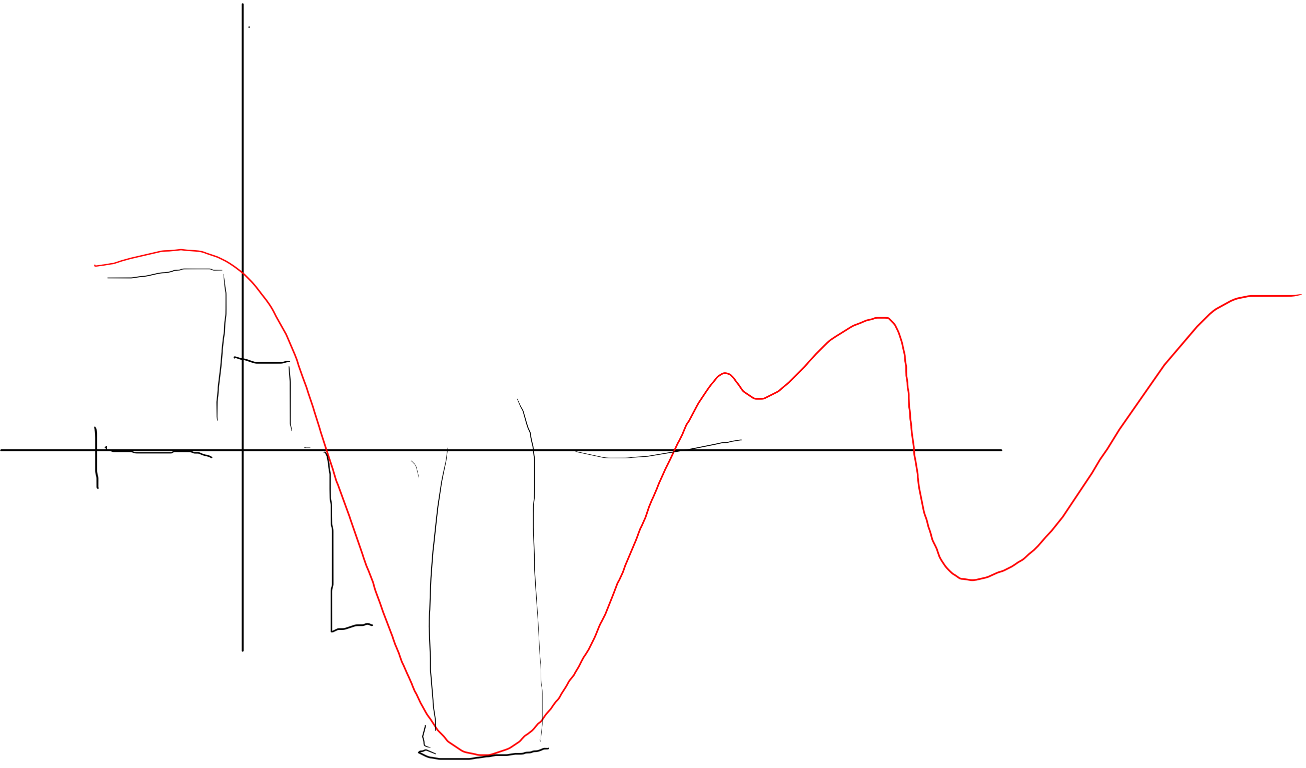


S decomposizione

$$s(f,S) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\inf_{x\in I_i}}_{=0} (f(x)) \cdot m(I_i) = 0$$

$$S(f,S) = \sum \underbrace{\sup_{x\in I_i} f(x)}_{=1} \cdot m(I_i) = 1$$

$$\int^{-}_{[0,1]} f\,dm = 0 \qquad \int^{+}_{[0,1]} f\,dm = 1$$



Una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile secondo Riemann se

$$\int^{-}_{[a,b]} f \, dm = \int^{+}_{[a,b]} f \, dm.$$

In questo caso diremo integrale (di Riemann) di f su $[a,b]$ questo numero.

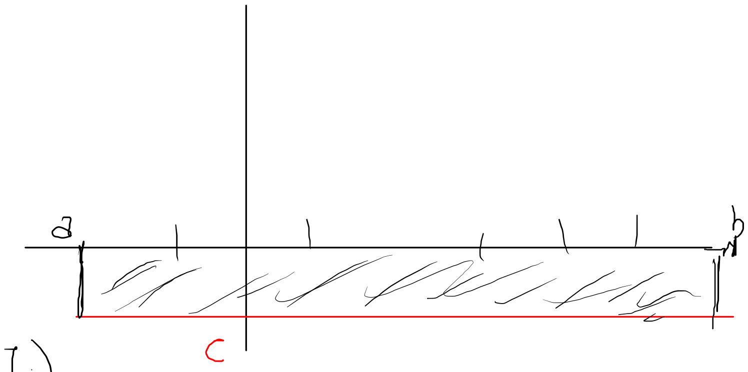
$$\boxed{\int_{[a,b]} f \, dm}$$

La funzione di Dirichlet è un esempio di funzione NON integrabile.

Es: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c$ costante.

Sia D una decomposizione

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = c \qquad \sup_{x \in I_i} f(x) = c$$



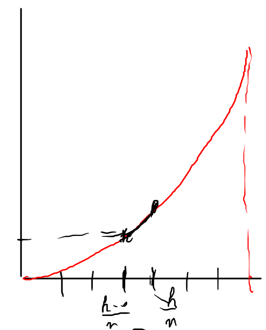
$$s(f,D) = \sum \underbrace{\inf_{I_i} f}_{c} \cdot m(I_i) = c \sum m(I_i)$$

$$= c \cdot (b-a) \implies \int_{[a,b]} f \, dm = c \cdot (b-a)$$

$$S(f,D) = c(b-a) \implies f \text{ è integrabile e}$$

$$\int_{[a,b]} f \, dm = c \cdot (b-a)$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$



Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la decomposizione "uniforme" di $[0,1]$ S_n:

$I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \ldots \quad I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \quad I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$

$$s(f, S_n) = \sum_{k=1}^{n} \min_{x \in I_k} x^2 \cdot \frac{1}{n} = 0 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(\underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2} \right) = \frac{1}{n^3} \, \frac{(n-1) \cdot n \, (2(n-1)+1)}{6}$$

Foglio 5 es. 3b

$$\lim_{n \to +\infty} s(f, S_n) = \frac{1}{3}$$

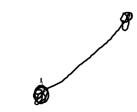
Rifacciamo i calcoli per $S(f, S_n)$ e otteniamo

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, S_n) = \frac{1}{3}$$

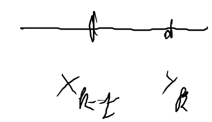
$\Rightarrow f$ è integrabile e $\int_{[0,1]} f \, dm = \frac{1}{3}$

Teorema di integrabilità delle funzioni monotone

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile.

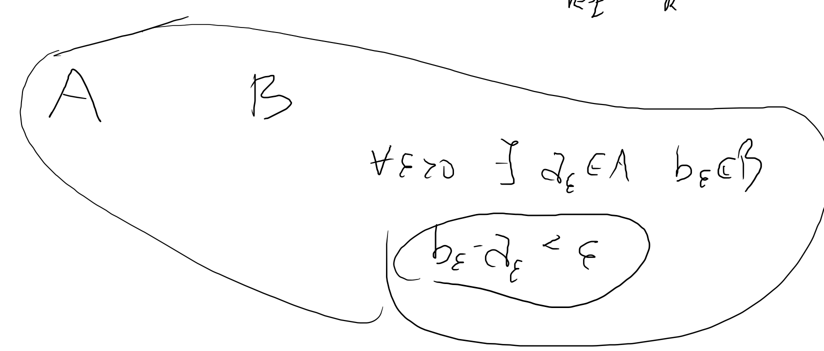


Dim Sia f crescente. Sia S decomposizione $I_k = [x_{k-1}, x_k]$



$$s(f,S) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot m(I_k)$$

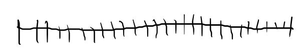
$$S(f,S) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot m(I_k)$$



$$S(f,S) - s(f,S) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) \cdot \underbrace{m(I_k)}_{\varepsilon}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$

prendiamo una decomposizione S tale che $\forall k = 1 \dots n$ $m(I_k) < \varepsilon$



Allora $S(f,\delta) - s(f,\delta) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\, \overbrace{m(I_k)}^{<\varepsilon} \le$

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{h=1}^{n} [f(x_h) - f(x_{h-1})]$$

$a = x_1$ $\quad$ $b = x_n$

$$= \varepsilon \left[\cancel{f(x_1)} - f(a_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + f(x_3) - \cancel{f(x_2)} + \cdots + f(b) - \cancel{f(x_{n-1})} \right]$$

$$= \varepsilon \underbrace{[f(b) - f(a)]}$$

Si è dimostrato che $\forall \sigma > 0$ esiste una decomposizione S_σ tale che $S(f, S_\sigma) - s(f, S_\sigma) < \sigma$; quindi $\int^{-}_{[a,b]} f\, dm = \int^{+}_{[a,b]} f\, dm$.