METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$S: AX = B \rightsquigarrow (A \mid B)$ matrice completa di S

1) Con uno scambio di due righe di $(A \mid B)$ possiamo assumere che non vi siano pivot a sinistra del pivot della prima riga.
2) Moltiplicando la prima riga di $(A \mid B)$ possiamo fare in modo che $a_{11} = 1$.
3) Se $a_{i1} \neq 0$, per $i > 1$, possiamo sommare alla i-esima riga la prima moltiplicata per $-a_{i1}$, cioè sostituiamo $(A \mid B)^{(i)}$ con $(A \mid B)^{(i)} - a_{i1}(A \mid B)^{(1)}$.
   La nuova matrice avrà $a_{i1} = 0$, $\forall i > 1$.
4) Si trascura la prima riga e si ricomincia dal punto (1) ragionando sulle righe successive, iterando il procedimento.

Alla fine si ottiene una matrice a gradini, e il sistema può essere risolto.
Dato che ad ogni passaggio si applicano operazioni elementari sulle righe, il sistema a gradini sarà equivalente al sistema dato.

Esempio

1) $\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -6x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{6} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t + \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Siano $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$. Allora $\text{span}(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{K}^n$ non cambia applicando operazioni elementari:

$$\begin{cases} v'_i = v_i + \lambda v_j, & i \neq j \\ v'_s = v_s, & s \neq i \end{cases} \Rightarrow v'_s \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad \forall s = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \text{Span}(v'_1, \dots, v'_k) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

D'altra parte $v_i = v'_i - \lambda v_j = v'_i - \lambda v'_j$

$v_s = v'_s \quad , \quad s \neq i$

$$\Rightarrow \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \subset \text{Span}(v'_1, \dots, v'_k)$$

$$\Rightarrow \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(v'_1, \dots, v'_k)$$

Pertanto, applicando il metodo di Gauss alle righe di una matrice, non si modifica lo span delle righe.

Es $v_1 = (1, 3, -1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 5, -4)$

$U = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 = (1, 3, -1)$, $u_2 = (0, -2, 3)$

$U = \text{Span}(u_1, u_2)$, $\dim U = 2$.

Spazio delle soluzioni

Consideriamo un sistema omogeneo

$$S_0 : \ A X = 0_{\mathbb{R}^m}$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

S_0 ha la soluzione nulla $0_{\mathbb{K}^n}$

$$A \, 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^m}$$

quindi è compatibile.

Teorema Lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} di un sistema omogeneo $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Dim $0_{\mathbb{K}^n} \in \Sigma_{S_0} \neq \emptyset$

Se $u, u' \in \Sigma_{S_0} \Rightarrow A u = 0, \ A u' = 0 \Rightarrow$

$$A(u + u') = A u + A u' = 0 \Rightarrow$$

$u + u' \in \Sigma_{S_0}$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \Sigma_{S_0} \Rightarrow A(\lambda u) = \lambda A u = 0$
$\Rightarrow \lambda u \in \Sigma_{S_0}$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $u \in V$. Si chiama traslazione di vettore u l'applicazione

$$t_u : V \longrightarrow V, \qquad t_u(v) = u + v.$$

OSS 1) $t_{0_V} = id_V$.

2) $t_u \circ t_{u'} = t_{u+u'} = t_{u'} \circ t_u$, infatti
$(t_u \circ t_{u'})(v) = t_u(u'+v) = u + u' + v = t_{u+u'}(v)$
$\forall v \in V$.

3) $t_{-u} = (t_u)^{-1}$ ($\Rightarrow t_u$ biiettiva)

4) t_u non è lineare se $u \neq 0_V$, infatti
$t_u(0_V) = u$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $A \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. Diciamo che A è un sottospazio affine di V se esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ e esiste un vettore $u \in V$ t.c.

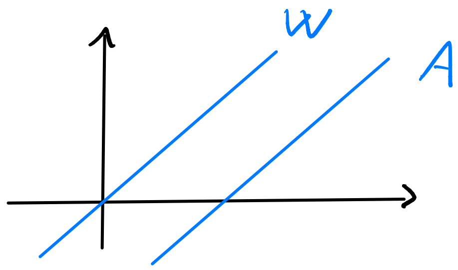
$$A = t_u(W).$$

W è detto giacitura di A e si pone per definizione $\dim A \overset{def}{=} \dim W$.

Quindi un sottospazio affine è un traslato di un sotto-spazio vettoriale di V.

OSS I sottospazi vettoriali di V (e V stesso) sono anche sottospazi affini.

Es In $\mathbb{R}^2$ una retta qualunque è un sottospazio affine di dimensione 1. La sua giacitura è la retta parallela passante per $O_{\mathbb{R}^2}$



I sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono i punti (dim = 0) le rette (dim = 1), i piani (dim = 2) e $\mathbb{R}^3$ stesso (dim = 3).