Teorema di struttura Sia $S : AX = B$ un sistema lineare, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^m$. Supponiamo che S sia compatibile. Allora lo spazio delle soluzioni Σ_S è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ avente come giacitura lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$.

Dim Sia $p \in \Sigma_S$ una soluzione particolare di S, cioè $Ap = B$.

$\forall\, u \in \Sigma_S$ si ha $A(u-p) = Au - Ap = B - B = 0_{\mathbb{K}^m}$

$\Rightarrow v := u - p \in \Sigma_{S_0} \Rightarrow u = v + p$, per un certo $v \in \Sigma_{S_0}$.

Viceversa se $v \in \Sigma_{S_0}$ allora $A(v+p) = Av + Ap =$

$= 0_{\mathbb{K}^m} + B = B \Rightarrow v + p \in \Sigma_S$.

Quindi $\Sigma_S = t_p(\Sigma_{S_0})$.

OSS Qualunque soluzione di $S : AX = B$ è della forma $u = v + p$ dove $p \in \Sigma_S$ è una soluzione particolare di S e $v \in \Sigma_{S_0}$ è una soluzione qualunque del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$

Sia ora $S: AX = B$ un sistema lineare compatibile, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, e sia $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ una soluzione particolare di S. $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ con giacitura Σ_{S_0} e $\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0}$.

Se $\dim \Sigma_S = 0$ allora p è l'unica soluzione di S.

Se $\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0} = \ell \geq 1$, scegliamo una base $(v_1, \dots, v_\ell)$ per $\Sigma_{S_0} \subset \mathbb{K}^n$

Per il teorema le soluzioni di S sono date da

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_\ell v_\ell + p \quad , \forall\, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}.$$

Posto $v_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ consideriamo la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ che ha come colonne i vettori della base $(v_1, \dots, v_\ell)$ di Σ_{S_0}.

La <u>soluzione generale</u> di S è

$$X = CT + p \quad , \forall\, T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^\ell,$$ cioè

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} t_1 + \dots + c_{1\ell} t_\ell + p_1 \\ \vdots \\ x_n = c_{n1} t_1 + \dots + c_{n\ell} t_\ell + p_n \end{cases} \quad \forall\, t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}$$

dette anche <u>equazioni parametriche</u> di Σ_S.

Nucleo e immagine

Def Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Si chiama <u>immagine</u> di f il sottoinsieme

$$\operatorname{im} f \overset{\text{def}}{=} \{ f(v) \mid v \in V \} \subset W.$$

Si chiama <u>nucleo</u> di f il sottoinsieme

$$\operatorname{Ker} f \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} \subset V$$

(Ker deriva dall'inglese kernel)

In altre parole, $\operatorname{im} f = f(V) \subset W$ e $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0_W) \subset V$.

Teorema Sia $f: V \to W$ lineare. Allora $\operatorname{im} f$ è un sottospazio vettoriale di W e $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Dim</u> <u>$\operatorname{im} f$</u>

1) $\operatorname{im} f \neq \emptyset$ (ovvio)

2) $w_1, w_2 \in \operatorname{im} f \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2) \Rightarrow$

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \operatorname{im} f$$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $w \in \operatorname{im} f \Rightarrow \exists\, v \in V$ t.c. $w = f(v)$

$\Rightarrow \lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in \operatorname{im} f.$

$\underline{\ker f}$

1) $f(0_V) = 0_W \implies 0_V \in \ker f \neq \emptyset$

2) $v_1, v_2 \in \ker f \implies f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_W$

$\implies v_1 + v_2 \in \ker f$

3) $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in \ker f \implies f(\lambda v) = \lambda f(v) = 0_W$

$\implies \lambda v \in \ker f$.

Def Sia $f : V \to W$ lineare. Si chiama rango di f la dimensione di $\operatorname{im} f$, cioè

$$\operatorname{rg} f \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{im} f).$$

OSS Se $(v_1, \dots, v_n)$ è base per V allora $\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$, infatti

$$\text{se } v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \implies f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).$$

Quindi $\operatorname{rg} f \leq \min(\dim V, \dim W)$ essendo $\operatorname{im} f \subset W$ generato da $n = \dim V$ vettori.

Teorema della dimensione Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che V abbia dimensione finita. Allora

$$\dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = \dim V.$$

Dim Sia $(u_1, \dots, u_k)$ una base per $\ker f \Rightarrow$
esistono $v_1, \dots, v_r \in V$ t.c.
$(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$ sia base per V.
Poniamo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$.

Per quanto osservato sopra $\operatorname{im} f = \operatorname{Span}(w_1, \dots, w_r)$
dato che $f(u_i) = 0_W \quad \forall i = 1, \dots, k$.
Mostriamo che $(w_1, \dots, w_r)$ è base per $\operatorname{im} f$.

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = 0_W \Rightarrow$$
$$0_W = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \ker f \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$$
t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k \Rightarrow$
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - \mu_1 u_1 - \dots - \mu_k u_k = 0_V \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \quad e \quad \mu_1 = \dots = \mu_k = 0$$
perché $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$ è base per V.
Quindi $w_1, \dots, w_r$ sono linearmente indipendenti.

$\dim(\ker f) = k$, $\dim(\operatorname{im} f) = \operatorname{rg} f = r$
$\dim V = k + r$.

Es $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y,\ 2x-2y)$
è lineare in quanto le componenti sono polinomi omogenei di 1° grado.

$$\ker f: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \ker f = \operatorname{Span}((1,1)) \Rightarrow \operatorname{rg} f = 2 - 1 = 1.$

$f(1,0) = (1,2) \rightsquigarrow \operatorname{im} f = \operatorname{span}((1,2))$.

OSS $f : V \to W$ lineare è suriettiva $\iff$ $\operatorname{im} f = W \iff \operatorname{rg} f = \dim W$ (se $\dim W < \infty$)

Teorema Sia $f : V \to W$ lineare. Allora f è iniettiva $\iff \ker f = \{0_V\}$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ ovvio

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_V \Rightarrow$
$f(v_1 - v_2) = 0_V \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow$
$v_1 = v_2$. Quindi f è iniettiva.

OSS $f : V \to W$ lineare è iniettiva $\iff \dim(\ker f) = 0$.

Se V e W hanno dimensione finita allora un'applicazione lineare $f : V \to W$ è un isomorfismo $\iff \dim V = \dim W = \operatorname{rg} f$.

Infatti $\dim V = \operatorname{rg} f \iff \ker f = \{0_V\} \iff$ f iniettiva e $\dim W = \operatorname{rg} f \iff f$ suriettiva.

In particolare $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$.

Più avanti faremo vedere l'implicazione inversa.