23/11/2021

Recap

La trasformata di Fourier di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

Esempi $\chi_{[a,b]} = f$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x)\, e^{-ix\omega}\, dx$$

$$= \int_a^b e^{-ix\omega}\, dx = \frac{e^{-ix\omega}}{-i\omega}\Big|_a^b$$

Integrali dipendenti da parametri

Teorema di continuità

Sia $h: \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo t.c.

- $h(\cdot, t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot): I \to \mathbb{C}$ è continua q.o. in $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile e t.c.

$$|h(x,t)| \le g(x) \qquad \forall t \in I, \text{ e q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora la funzione $H: I \to \mathbb{C}$ definita come

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\, dx$$

è continua in I.

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale

Sia $h : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tc

- $h(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile $\forall t \in I$
- $h(x, \cdot) : I \to \mathbb{C}$ è di classe C^1 q.o. $x \in \mathbb{R}$

Se $\exists\, g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili e tc

$$|h(x,t)| \leq g_1(x) \qquad e \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_2(x)$$

$\forall t \in I$ e q.o. in $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\, dx$$

è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(x,t)\, dx$$

Proprietà della FT

1) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ed inoltre

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Dim

1) Proviamo che $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, applichiamo il thm di continuità (vedi sopra). Definiamo la funzione ausiliaria

$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h(x,\omega) = f(x) e^{-i\omega x}$ si ha che

- $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua

ed inoltre

$$|h(x,\omega)| = |f(x)\, e^{-ix\omega}| \leq |f(x)|$$ che per ipotesi è L^1

Il teorema di continuità implica che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\omega)\, dx$$

è continua rispetto a ω. #

ii) Proviamo che $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$(*) \quad |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\omega}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-ix\omega}|\, dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

Notiamo che la quantità alla dx nella disuguaglianza $(*)$ è indipendente da ω

$$\underbrace{\sup_{\omega} |\hat{f}(\omega)|}_{= \|\hat{f}\|_\infty} \leq \sup_{\omega} \|f\|_1 = \|f\|_1$$

#