Foglio 3 es 3

Dimostrare che le seguenti successioni di funzioni sono successioni di Cauchy nello spazio

$$\left(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_1 \right)$$

che però non convergono ad alcun elemento di $C([-1,1])$

Def Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Una successione $(x_n)_n$ è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tc } \forall n, m > n_0$$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

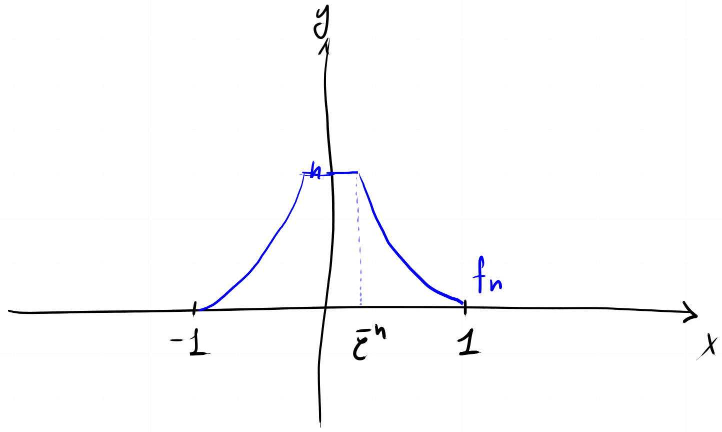
Alternativamente $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

Def Sia (X, d) uno spazio metrico, si dice completo quando ogni successione di Cauchy è convergente.

Esempio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico completo

OSS Ogni successione convergente è di Cauchy, ma non è vero che ogni successione di Cauchy sia convergente.

1)
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } |x| \le e^{-n} \\ -\log|x| & \text{se } e^{-n} \le |x| \le 1 \end{cases}$$



$\forall n$ la funzione $x \mapsto f_n(x)$ è una funzione pari

Calcoliamo f_n in e^{-n}

$$f_n(e^{-n}) = -\log|e^{-n}| = -\log e^{-n} = \log(e^{-n})^{-1}$$
$$= \log e^{n} = n$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo dunque provato che la funzione $f_n(x)$ è continua nei punti $x = \pm e^{-n}$

Cerchiamo di identificare un possibile limite per la successione $(f_n)_n$

Se $n \to \infty$ $e^{-n} \longrightarrow 0$ per cui il nostro limite target sarà la funzione

$$f(x) = -\log|x| \qquad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

OSS la funzione f così identificata <u>non</u> è continua in 0, dunque

$$f \notin C^0([-1, 1])$$

Resta dunque da provare solamente che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_1$

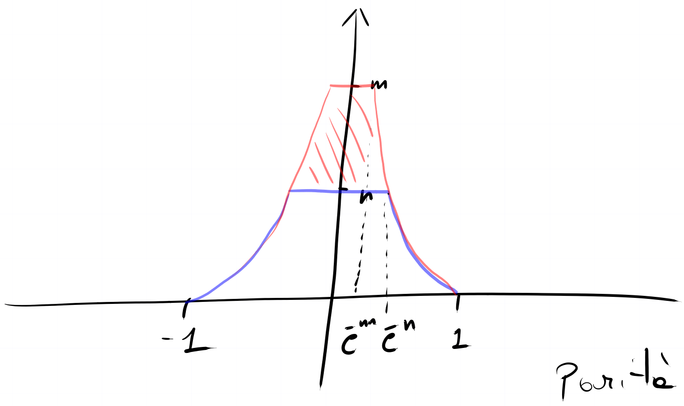
Secondo la definizione di successione di Cauchy applicata allo spazio normato specifico $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ vogliamo vedere che

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0$$

$$\|$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$

Ipotesi operativa $m \geq n$



$m \geq n$

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } |x| \leq e^{-k} \\ -\log|x| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parità delle funzioni

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx = 2\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$= 2\int_0^{e^{-m}} (m-n)\,dx + 2\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} (-\log x - n)\,dx + 2\int_{e^{-n}}^{1} \cancel{-\log x - (-\log x)}\,dx \to 0$$

$$= 2(m-n)e^{-m} - 2n(e^{-n} - e^{-m}) - 2\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} \log x\,dx = (1)$$

$$\int \log x\,dx = \int \partial_x(x) \log x\,dx$$

$$= x\log x - \int dx = x(\log x - 1) + C$$

Il che ci permette di calcolare

$$\int_{e^{-m}}^{e^{-n}} \log x\,dx = x(\log x - 1)\Big|_{e^{-m}}^{e^{-n}} = e^{-n}(-n-1) - e^{-m}(-m-1)$$

$$= (m+1)e^{-m} - (n+1)e^{-n}$$

$$(1) = \underbrace{2(m-n)e^{-m}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0} - 2n\underbrace{\left(e^{-n} - e^{-m}\right)}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0} - 2\left[\underbrace{(m+1)e^{-m} - (n+1)e^{-n}}_{\xrightarrow{n,m\to\infty} 0}\right]$$

Abbiamo dunque dimostrato che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_1$ tuttavia <u>non</u> converge ad un elemento di $C^1([-1,1])$.