ALBERI AVL

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

COSA SONO GLI ALBERI AVL

COSA SONO GLI ALBERI AVL

- AVL da Adelson-Velsky e Landis, cognomi dei due ideatori (anno 1962)

COSA SONO GLI ALBERI AVL

- AVL da Adelson-Velsky e Landis, cognomi dei due ideatori (anno 1962)
- Sono alberi binari di ricerca che sono sempre bilanciati

COSA SONO GLI ALBERI AVL

- AVL da Adelson-Velsky e Landis, cognomi dei due ideatori (anno 1962)
- Sono alberi binari di ricerca che sono sempre bilanciati
- Ove bilanciati non significa esattamente profondità $\log n$, ma $O(\log n)$

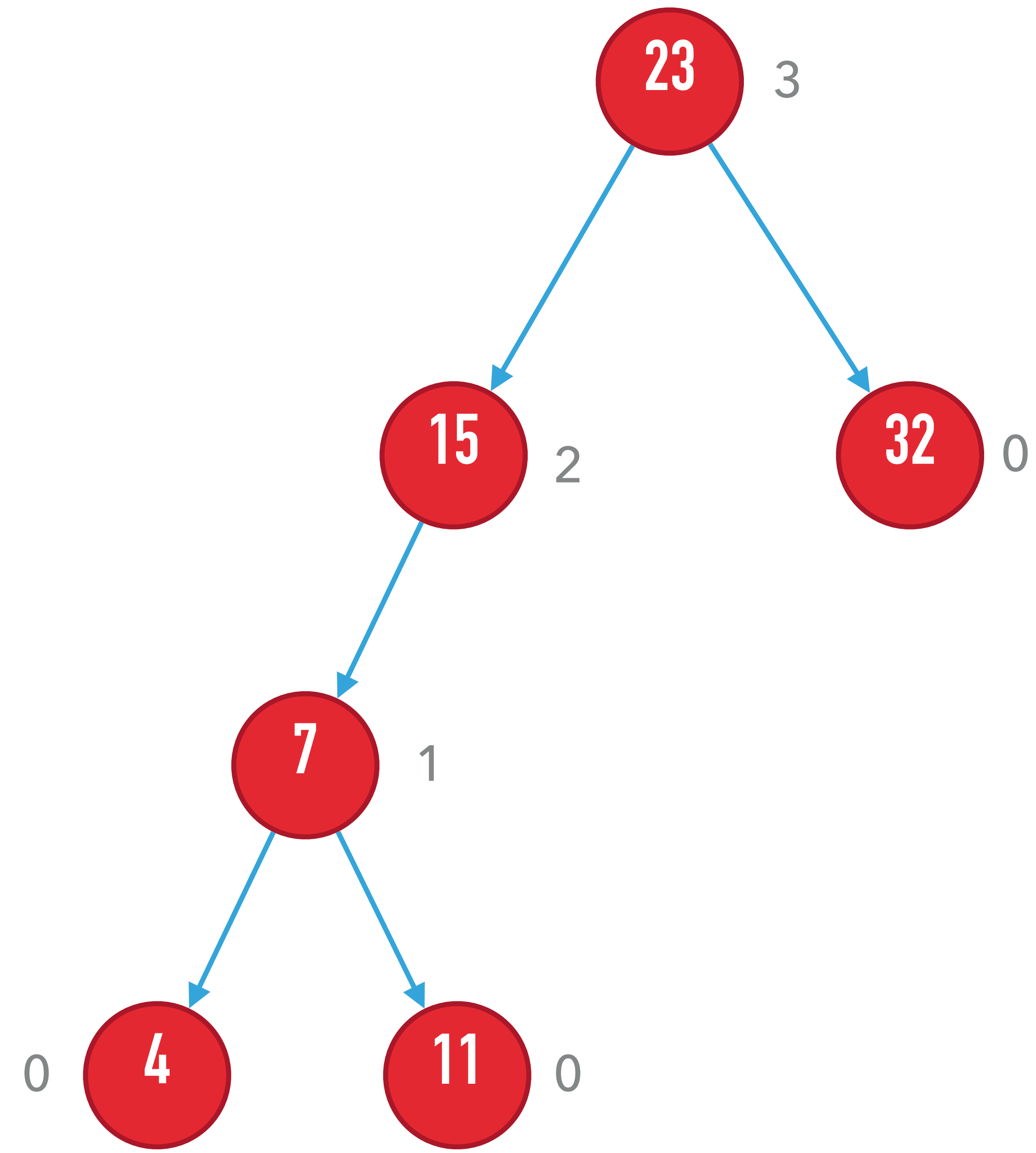
COSA SONO GLI ALBERI AVL

- AVL da Adelson-Velsky e Landis, cognomi dei due ideatori (anno 1962)
- Sono alberi binari di ricerca che sono sempre bilanciati
- Ove bilanciati non significa esattamente profondità $\log n$, ma $O(\log n)$
- Nel caso degli alberi AVL la costante del $\log n$ è bassa

DIFFERENZA DAGLI ALBERI SPLAY

- A differenza degli alberi splay, gli alberi AVL assicurano il bilanciamento, quindi le operazioni di ricerca richiedono sempre tempo $O(\log n)$
- Le operazioni di inserimento e rimozione modificano l'albero per mantenerlo bilanciato
- Le operazioni di ricerca non modificano l'albero (al contrario degli alberi splay)

ALTEZZA DI UN NODO



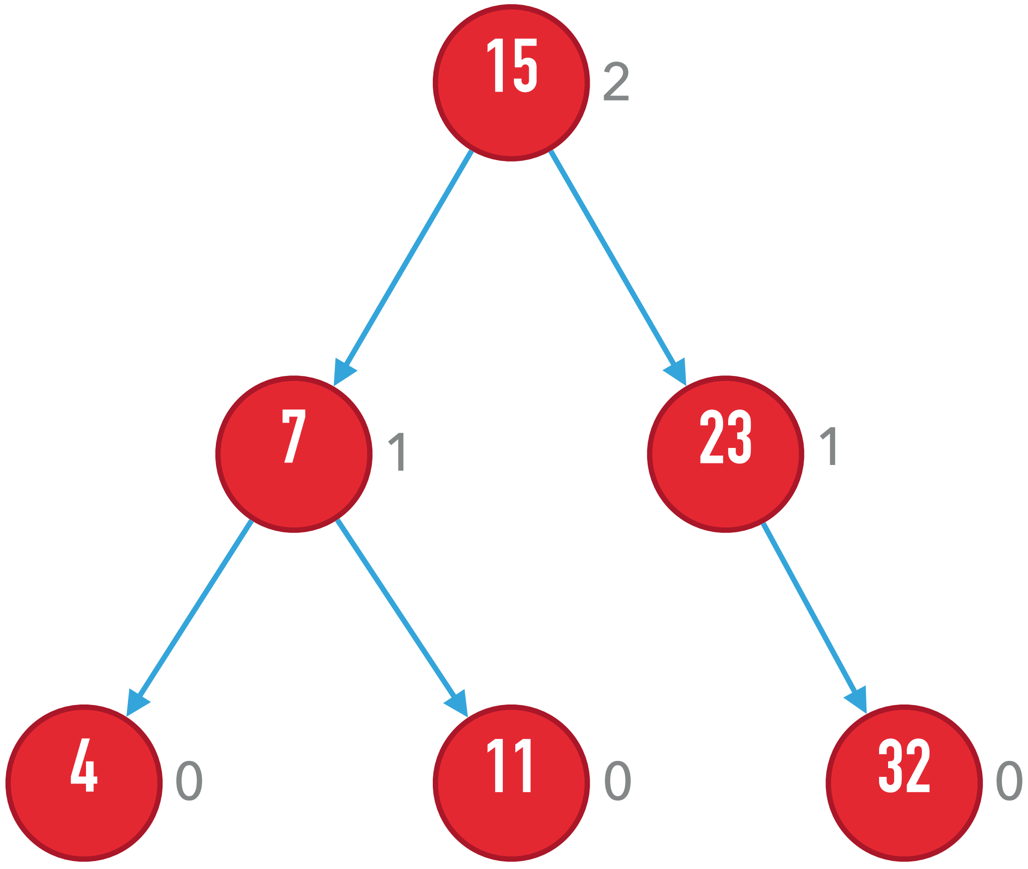
Definiamo come altezza di un nodo il percorso più lungo da quel nodo a una foglia

Possiamo facilmente calcolarla per ogni nodo come
1 + max{altezza del figlio sinistro, altezza del figlio destro}

PROPRIETÀ DEGLI ALBERI AVL

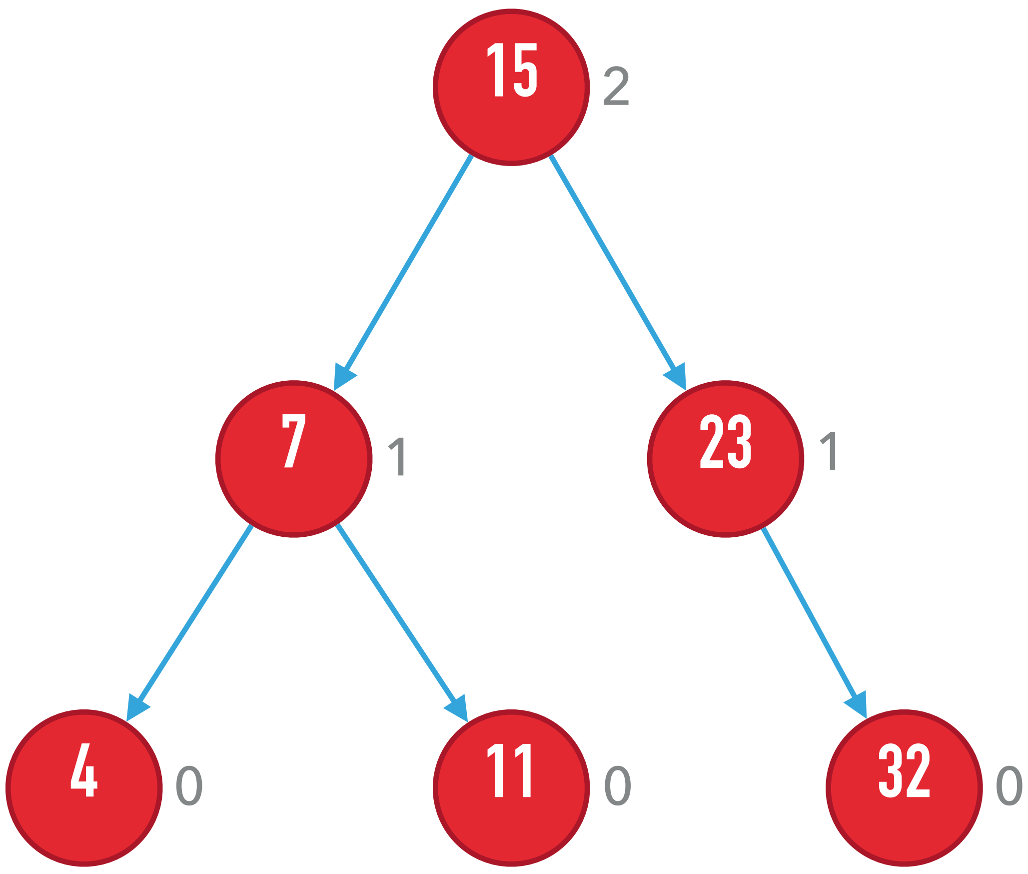
- Gli alberi AVL hanno la proprietà che la differenza in altezza del figlio destro e del figlio sinistro di ogni nodo è al più 1 (in valore assoluto)
- In caso di figlio assente si assume altezza di -1

DIFFERENZA IN ALTEZZA

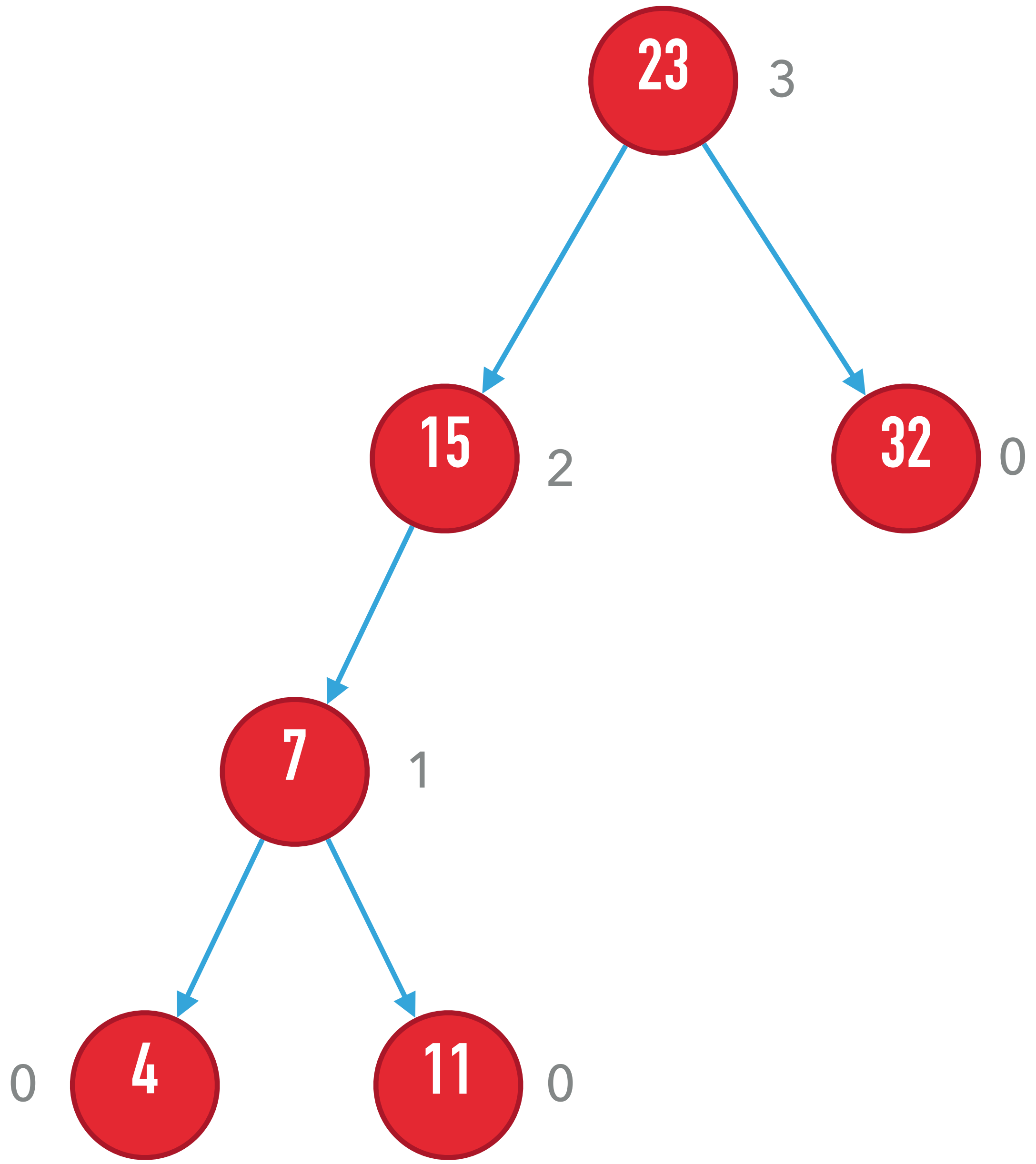


Questo albero rispetta la proprietà
(tutte le differenze sono zero o uno)

DIFFERENZA IN ALTEZZA

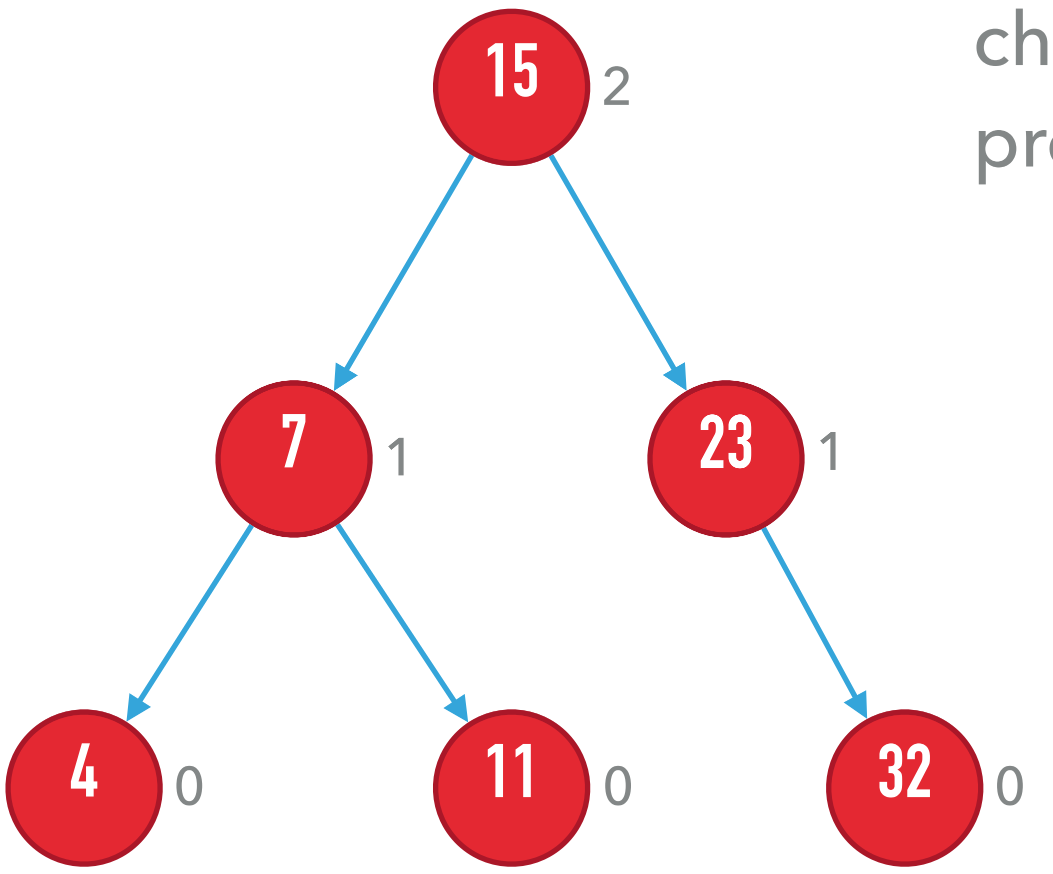


Questo albero rispetta la proprietà
(tutte le differenze sono zero o uno)

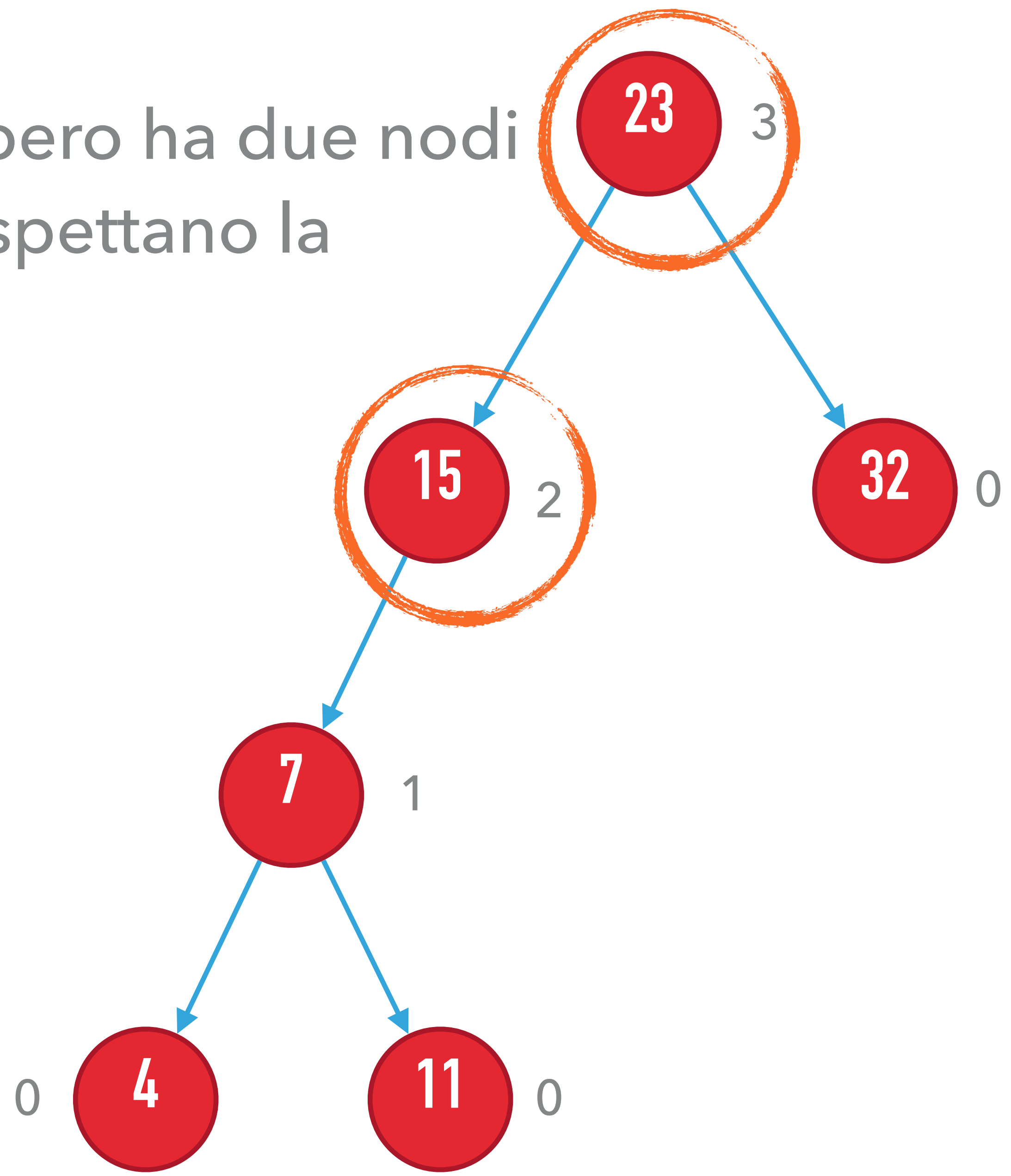


DIFFERENZA IN ALTEZZA

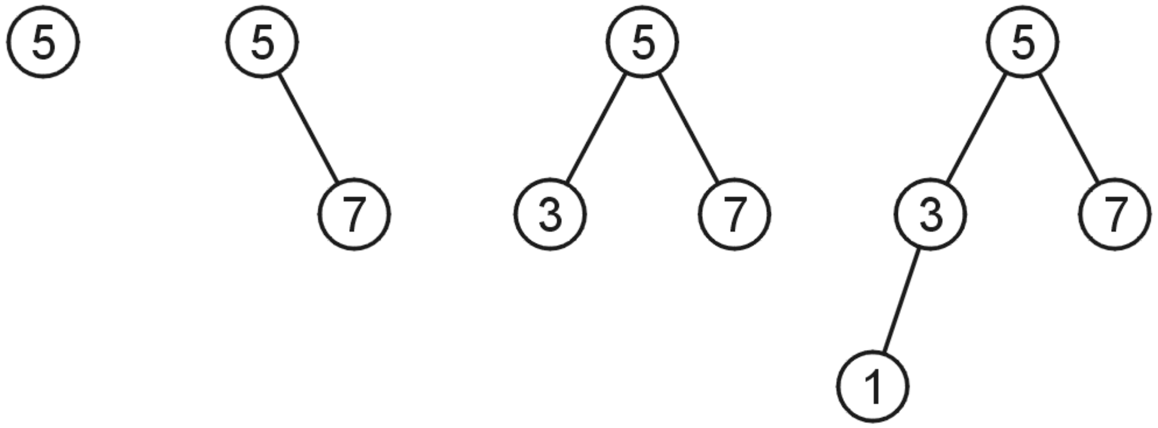
Questo albero ha due nodi che non rispettano la proprietà



Questo albero rispetta la proprietà (tutte le differenze sono zero o uno)

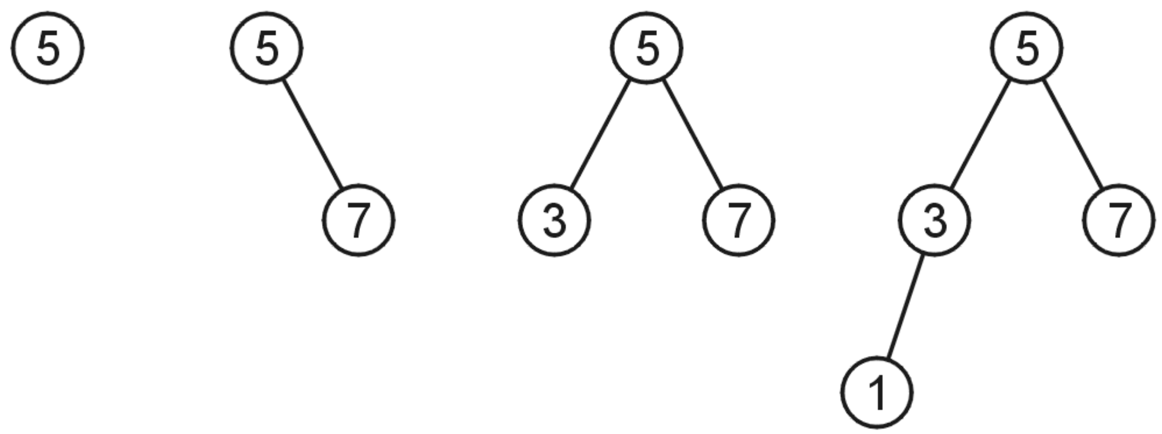


ESEMPI DI ALBERI AVL



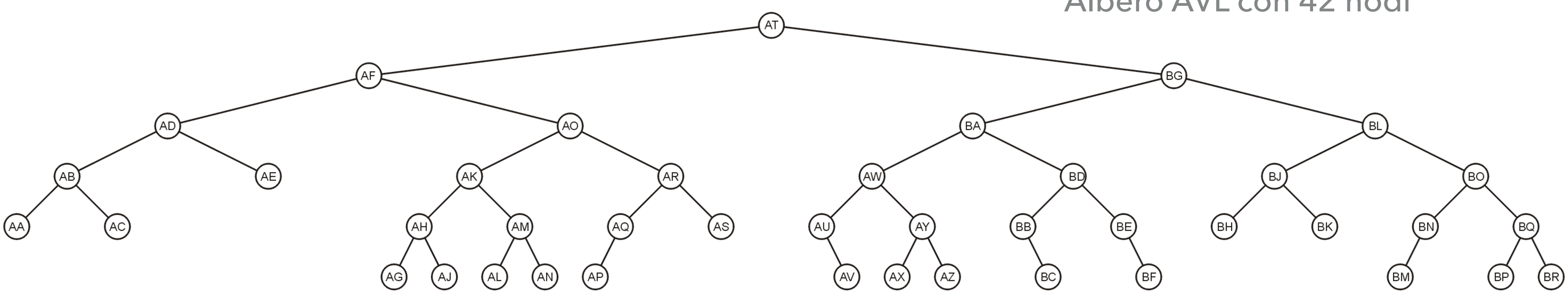
Alberi AVL con 1, 2, 3 e 4 nodi

ESEMPI DI ALBERI AVL

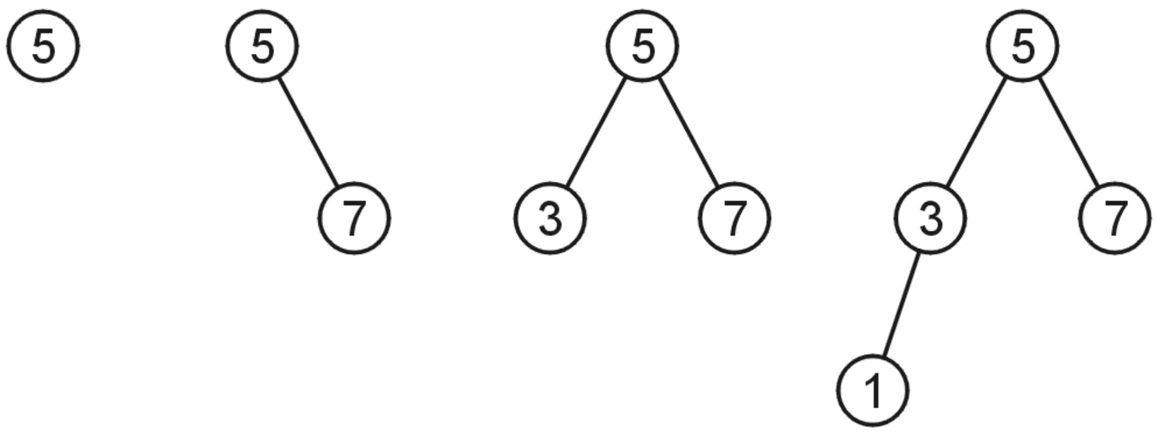


Alberi AVL con 1, 2, 3 e 4 nodi

Albero AVL con 42 nodi

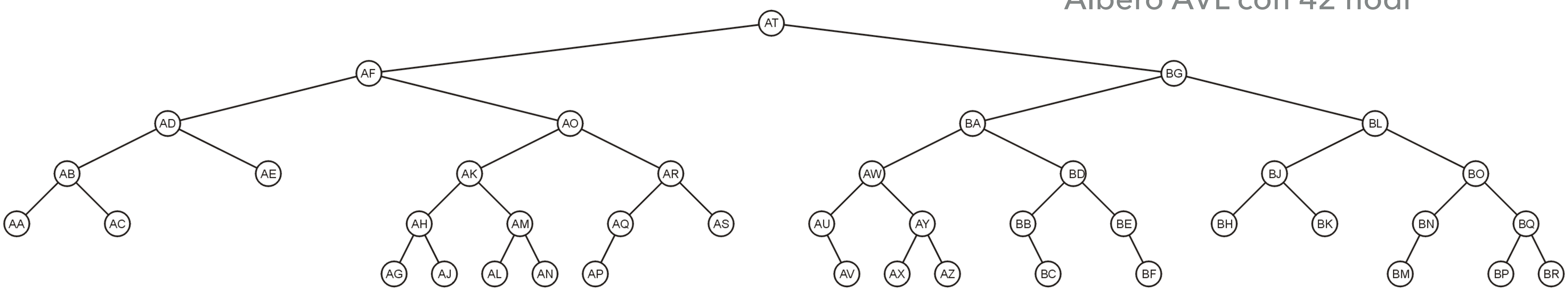


ESEMPI DI ALBERI AVL



Alberi AVL con 1, 2, 3 e 4 nodi

Albero AVL con 42 nodi



Sembra abbastanza “piatto”, con un’altezza limitata.

Possiamo dimostrare che un albero AVL ha sempre un’altezza $O(\log n)$ quando contiene n nodi?

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Invertiamo il problema di chiedere l'altezza dell'albero chiedendoci invece quale sia il numero minimo di nodi che un albero AVL di altezza h può contenere

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Invertiamo il problema di chiedere l'altezza dell'albero chiedendoci invece quale sia il numero minimo di nodi che un albero AVL di altezza h può contenere
- Indichiamo con N_h questo numero di nodi

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Invertiamo il problema di chiedere l'altezza dell'albero chiedendoci invece quale sia il numero minimo di nodi che un albero AVL di altezza h può contenere
- Indichiamo con N_h questo numero di nodi
- Dalla slide precedente otteniamo $N_0 = 1, N_1 = 2, N_2 = 4$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Quale è il caso peggiore per un albero AVL?

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Quale è il caso peggiore per un albero AVL?
- Quando c'è uno sbilanciamento di 1 tra i due figli.

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Quale è il caso peggiore per un albero AVL?
- Quando c'è uno sbilanciamento di 1 tra i due figli.
- Quindi possiamo definire N_h come una ricorrenza: $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Quale è il caso peggiore per un albero AVL?
- Quando c'è uno sbilanciamento di 1 tra i due figli.
- Quindi possiamo definire N_h come una ricorrenza: $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$
- Come possiamo ottenere un bound per il valore di N_h? Vediamo due modi

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Dato che $N_{h-1} \geq N_{h-2}$ possiamo riscrivere:
  $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2} \geq 1 + 2N_{h-2} \geq 2N_{h-2}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Dato che $N_{h-1} \geq N_{h-2}$ possiamo riscrivere:
  $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2} \geq 1 + 2N_{h-2} \geq 2N_{h-2}$
- Espandendo la ricorrenza otteniamo che per arrivare al caso base (valore di h costante) dobbiamo espandere almeno $h/2$ volte:

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Dato che $N_{h-1} \geq N_{h-2}$ possiamo riscrivere:
  $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2} \geq 1 + 2N_{h-2} \geq 2N_{h-2}$
- Espandendo la ricorrenza otteniamo che per arrivare al caso base (valore di h costante) dobbiamo espandere almeno $h/2$ volte:
- $N_h \geq 2N_{n-2} \geq 4N_{h-4} \geq 8N_{h-6} \geq \ldots \geq 2^i N_{h-2i}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Dato che $N_{h-1} \geq N_{h-2}$ possiamo riscrivere:
  $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2} \geq 1 + 2N_{h-2} \geq 2N_{h-2}$
- Espandendo la ricorrenza otteniamo che per arrivare al caso base (valore di h costante) dobbiamo espandere almeno $h/2$ volte:
- $N_h \geq 2N_{n-2} \geq 4N_{h-4} \geq 8N_{h-6} \geq \ldots \geq 2^i N_{h-2i}$
- Otteniamo quindi $N_h \geq 2^{h/2}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Possiamo ora prendere il logaritmo in base 2 da entrambi i lati:
  $\log_2 N_h \geq \log_2 2^{h/2} = h/2$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Possiamo ora prendere il logaritmo in base 2 da entrambi i lati:
  $\log_2 N_h \geq \log_2 2^{h/2} = h/2$
- Otteniamo quindi un bound sull'altezza: $h \leq 2 \log_2 N_h$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Possiamo ora prendere il logaritmo in base 2 da entrambi i lati:
  $\log_2 N_h \geq \log_2 2^{h/2} = h/2$
- Otteniamo quindi un bound sull'altezza: $h \leq 2 \log_2 N_h$
- Questo significa che per ogni numero n di nodi, anche se disposti nel caso peggiore saranno in un albero di altezza non più di $2 \log_2 n = O(\log n)$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Vediamo ora un metodo un poco più raffinato

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Vediamo ora un metodo un poco più raffinato

$N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$ assomiglia molto alla definizione dei numeri di Fibonacci:

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1\ F_3 = 2, \ldots, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Vediamo ora un metodo un poco più raffinato

$N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$ assomiglia molto alla definizione dei numeri di Fibonacci:

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1\ F_3 = 2, \ldots, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

Mostriamo per induzione che $N_h = F_{h+3} - 1$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

- Vediamo ora un metodo un poco più raffinato

$N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$ assomiglia molto alla definizione dei numeri di Fibonacci:

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1\ F_3 = 2, \ldots, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

Mostriamo per induzione che $N_h = F_{h+3} - 1$

Casi base: $N_0 = 1 = F_3 - 1$ e $N_1 = 2 = F_4 - 1$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} N_h &= N_{h-1} + N_{h-2} + 1 \\ &= F_{h+2} - 1 + F_{h+1} - 1 + 1 \\ &= F_{h+2} + F_{h+1} - 1 \\ &= F_{h+3} - 1 \end{aligned}$$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Passo induttivo:

$$
\begin{aligned}
N_h &= N_{h-1} + N_{h-2} + 1 \\
&= F_{h+2} - 1 + F_{h+1} - 1 + 1 \\
&= F_{h+2} + F_{h+1} - 1 \\
&= F_{h+3} - 1
\end{aligned}
$$

Quindi possiamo usare i numeri di Fibonacci per ottenere un bound sull'altezza dell'albero.

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Sappiamo che

$$F_k = \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} \text{ con } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Sappiamo che

$$F_k = \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} \text{ con } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

In generale $F_k \geq \dfrac{\phi^k - 1}{\sqrt{5}}$ e quindi usando $N_h = F_{h+3} - 1$:

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Sappiamo che

$F_k = \dfrac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}}$ con $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

In generale $F_k \geq \dfrac{\phi^k - 1}{\sqrt{5}}$ e quindi usando $N_h = F_{h+3} - 1$:

$N_h \geq \dfrac{\phi^{h+3} - 1}{\sqrt{5}} - 1$, ovvero $N_h \geq \dfrac{\phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \geq \dfrac{\phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1.45$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Riordinando: $\sqrt{5}(N_h + 1.45) \geq \phi^{h+3}$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Riordinando: $\sqrt{5}(N_h + 1.45) \geq \phi^{h+3}$

Prendiamo il logaritmo in base ϕ: $\log_\phi(\sqrt{5}N_h + 1.45) \geq h + 3$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Riordinando: $\sqrt{5}(N_h + 1.45) \geq \phi^{h+3}$

Prendiamo il logaritmo in base ϕ: $\log_\phi(\sqrt{5}N_h + 1.45) \geq h + 3$

Ovvero: $h \leq \log_\phi(\sqrt{5}(N_h + 1.45)) - 3$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Riordinando: $\sqrt{5}(N_h + 1.45) \geq \phi^{h+3}$

Prendiamo il logaritmo in base ϕ: $\log_\phi(\sqrt{5}N_h + 1.45) \geq h + 3$

Ovvero: $h \leq \log_\phi(\sqrt{5}(N_h + 1.45)) - 3$

Cambio di base del logaritmo: $h \leq \dfrac{\log_2(\sqrt{5}(N_h + 1.45))}{\log_2 \phi} - 3$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Riordinando: $\sqrt{5}(N_h + 1.45) \geq \phi^{h+3}$

Prendiamo il logaritmo in base ϕ: $\log_\phi(\sqrt{5}N_h + 1.45) \geq h + 3$

Ovvero: $h \leq \log_\phi(\sqrt{5}(N_h + 1.45)) - 3$

Cambio di base del logaritmo: $h \leq \dfrac{\log_2(\sqrt{5}(N_h + 1.45))}{\log_2 \phi} - 3$

Riscriviamo come $h \leq \dfrac{1}{\log_2 \phi} \log(N_h + 2) + c$

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Sapendo che $\frac{1}{\log_2 \phi} \leq 1.441$ si ha $h \leq 1.441 \log(N_h + 2) + c$

Questo significa che un albero con n nodi ha altezza $O(\log n)$

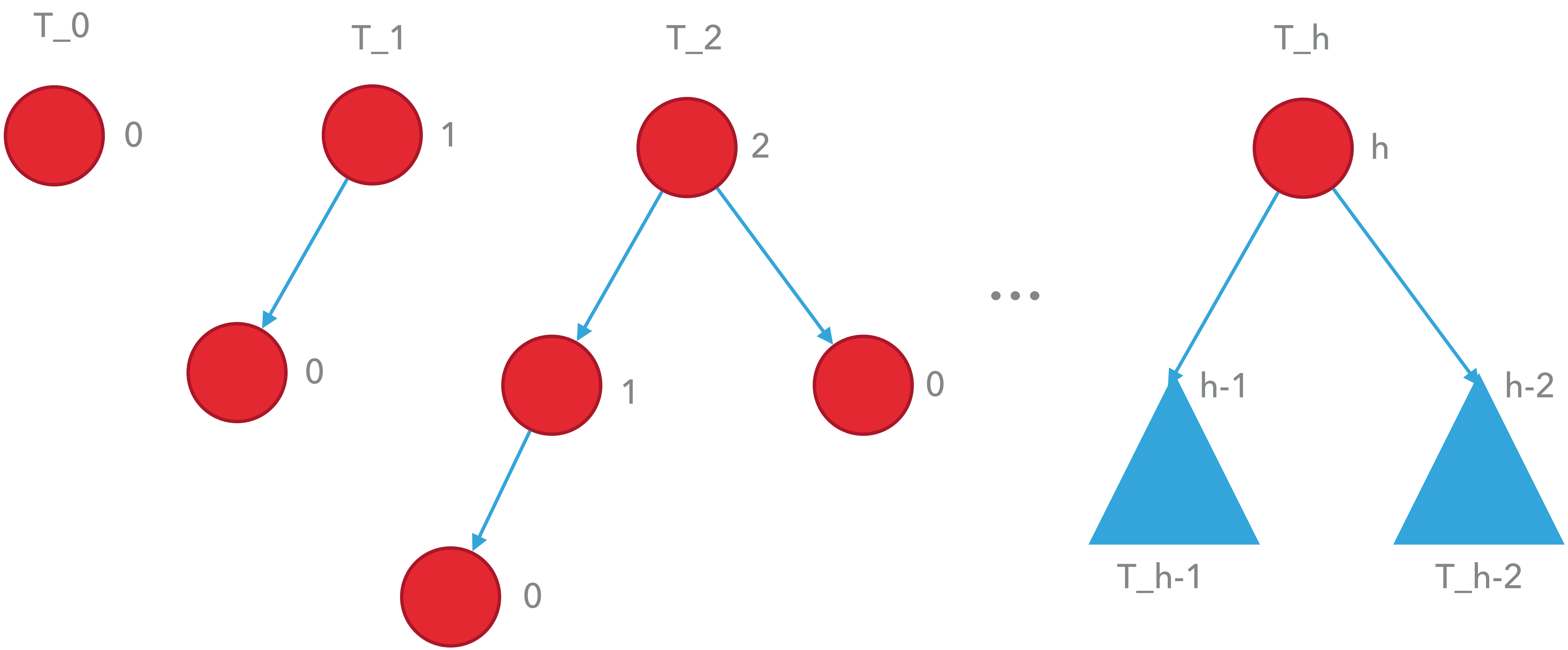
QUANTI NODI CONTIENE UN ALBERO AVL

Sapendo che $\dfrac{1}{\log_2 \phi} \leq 1.441$ si ha $h \leq 1.441 \log(N_h + 2) + c$

Questo significa che un albero con n nodi ha altezza $O(\log n)$

Possiamo anche dire di più: dato che libero binario più piccolo che contiene n nodi ha profondità $\lceil \log_2 n \rceil$, non siamo molto distanti da quel valore dato che il fattore moltiplicativo è circa 1.44.

ALBERI DI FIBONACCI



Sono gli alberi AVL con meno nodi.

COME GARANTIRE IL BILANCIAMENTO

COME GARANTIRE IL BILANCIAMENTO

- Per garantire il bilanciamento dobbiamo memorizzare dell’informazione all’interno dei nodi.

COME GARANTIRE IL BILANCIAMENTO

- Per garantire il bilanciamento dobbiamo memorizzare dell'informazione all'interno dei nodi.
- Due possibilità:
  - Altezza del nodo

COME GARANTIRE IL BILANCIAMENTO

- Per garantire il bilanciamento dobbiamo memorizzare dell'informazione all'interno dei nodi.
- Due possibilità:
  - Altezza del nodo
  - Quale è lo sbilanciamento: $\{-1,0,1\}$
    - Il valore rappresenta la differenza tra altezza del figlio destro e altezza del figlio sinistro

INSERIMENTO

INSERIMENTO

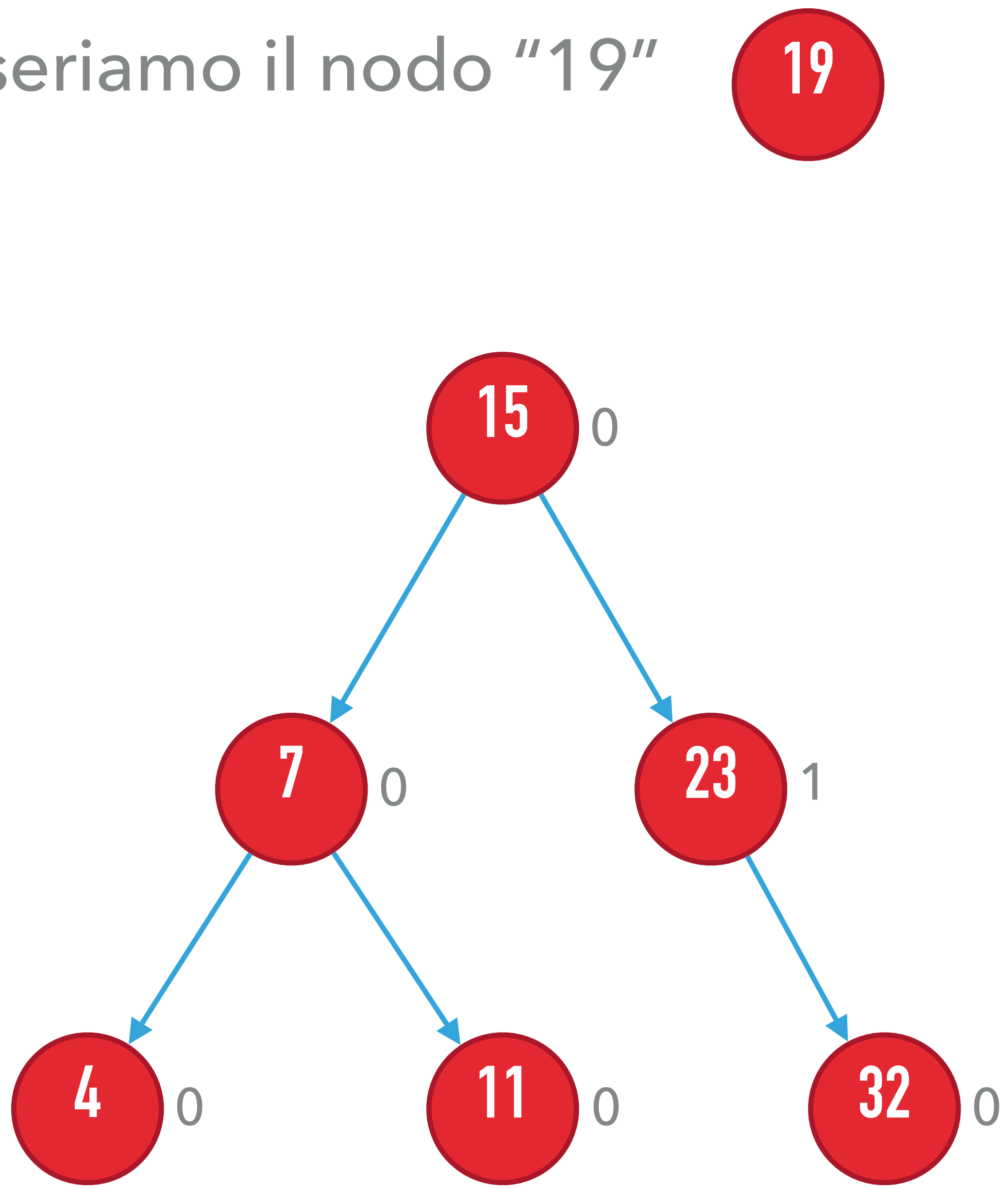
- L’inserimento può violare la proprietà AVL su più nodi nel percorso che va dalla radice al punto dove è stato inserito il nuovo nodo

INSERIMENTO

- L’inserimento può violare la proprietà AVL su più nodi nel percorso che va dalla radice al punto dove è stato inserito il nuovo nodo
- Vediamo come ogni sbilanciamento può essere risolto tramite una sequenza di rotazioni

INSERIMENTO

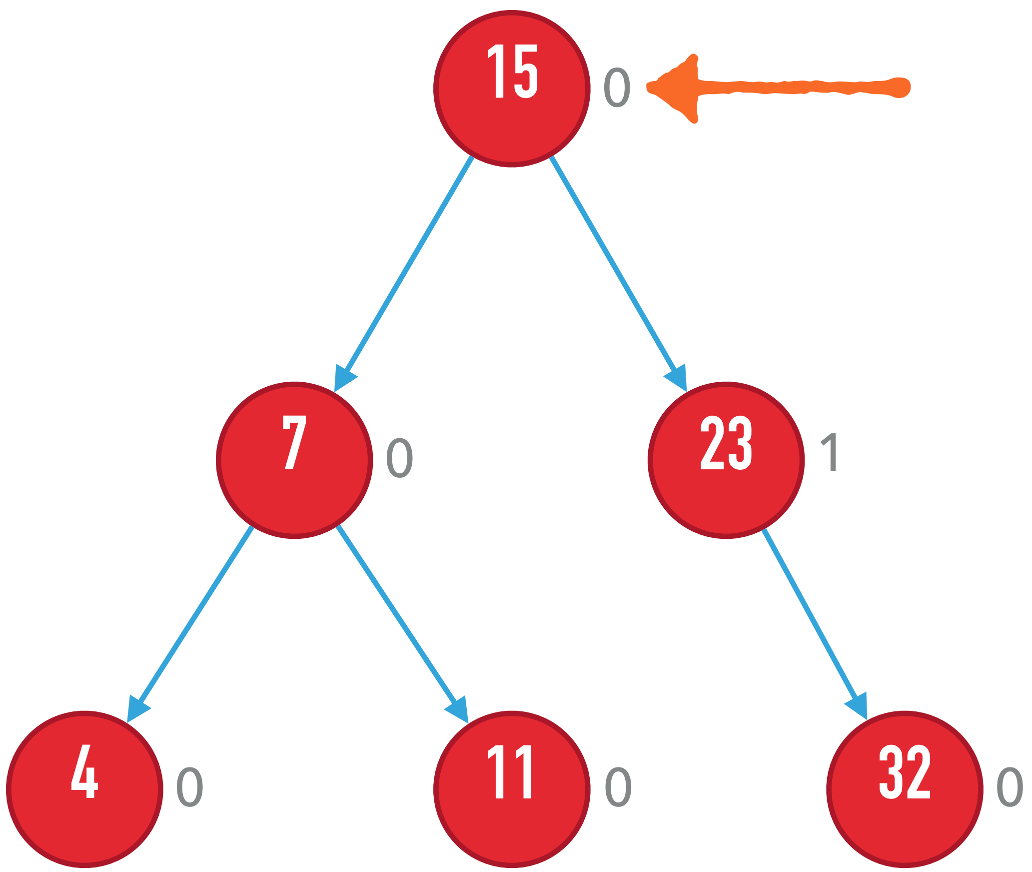
Inseriamo il nodo "19"



INSERIMENTO

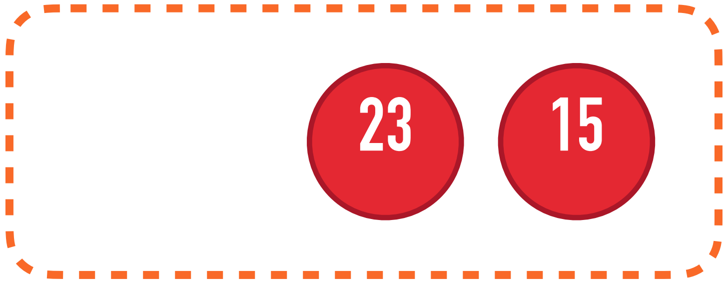
Inseriamo il nodo “19”

Stack dei nodi visitati

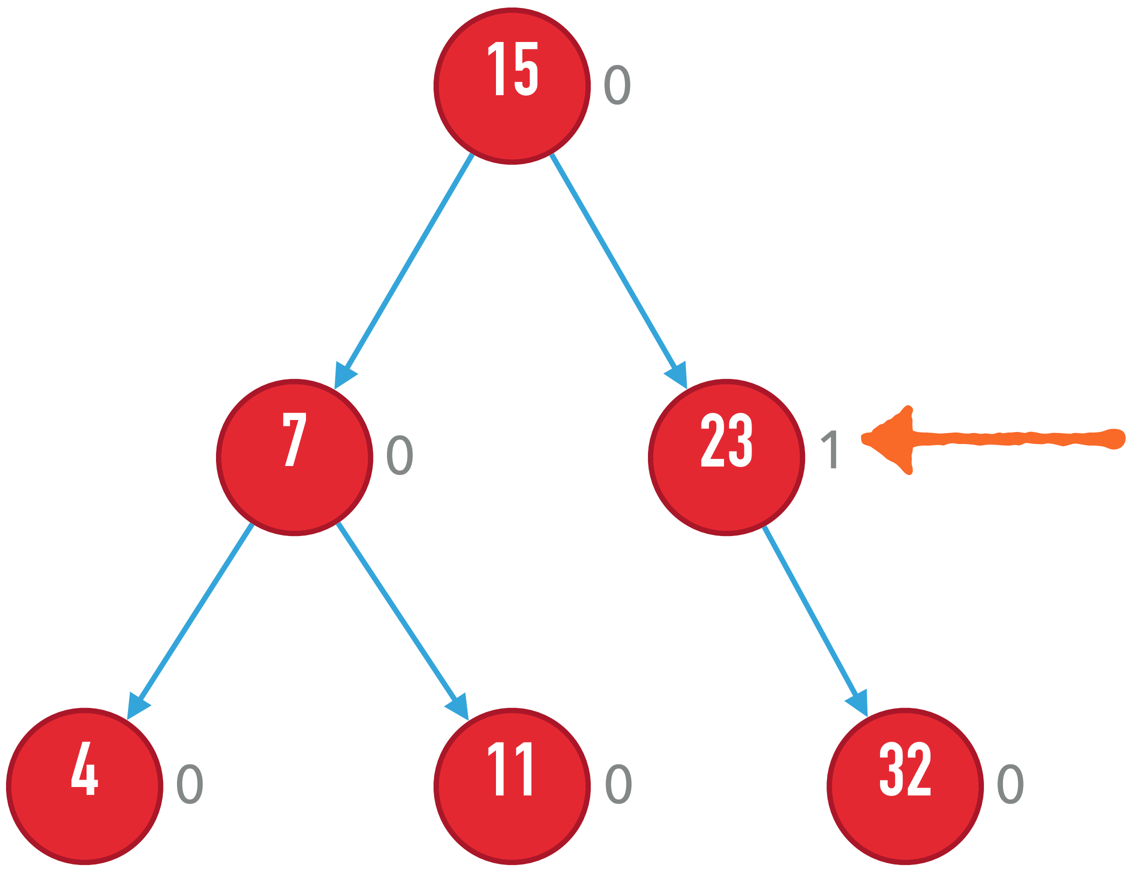


INSERIMENTO

Inseriamo il nodo "19"

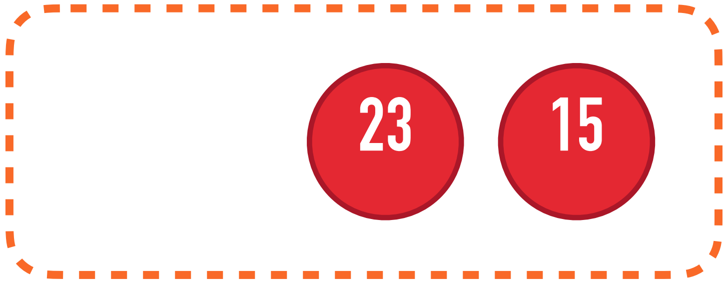


Stack dei nodi visitati

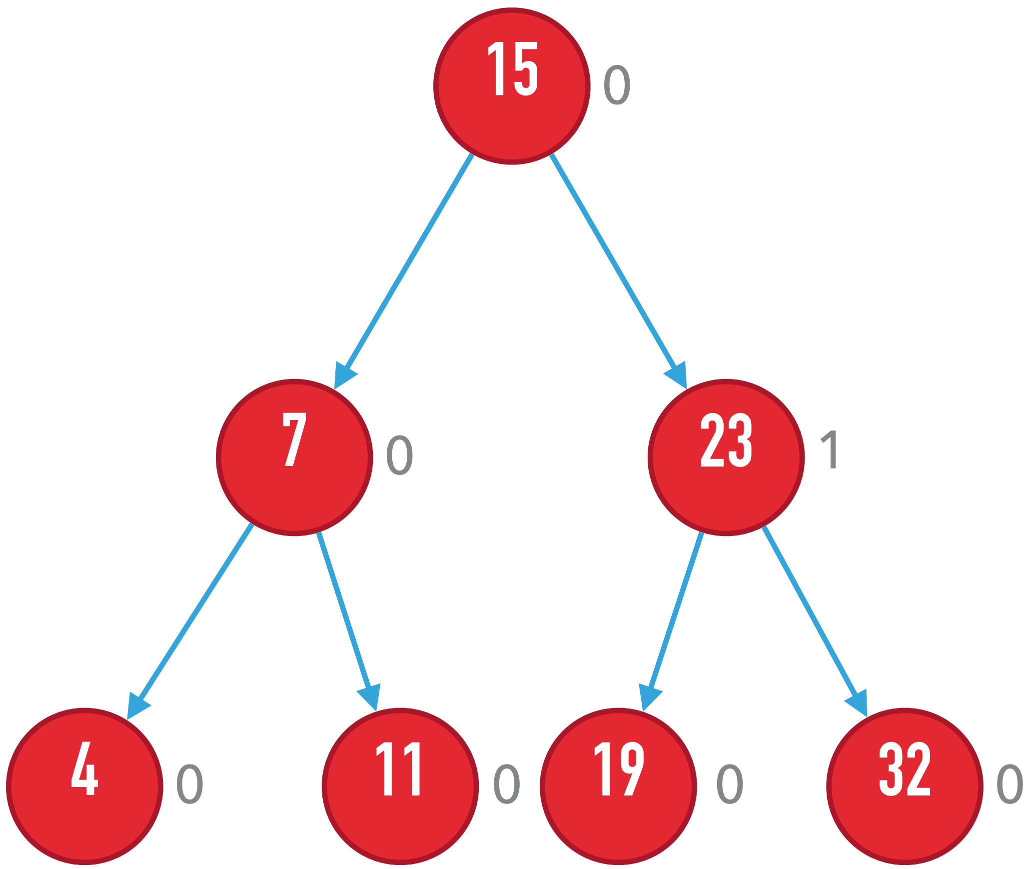


INSERIMENTO

Inseriamo il nodo “19”



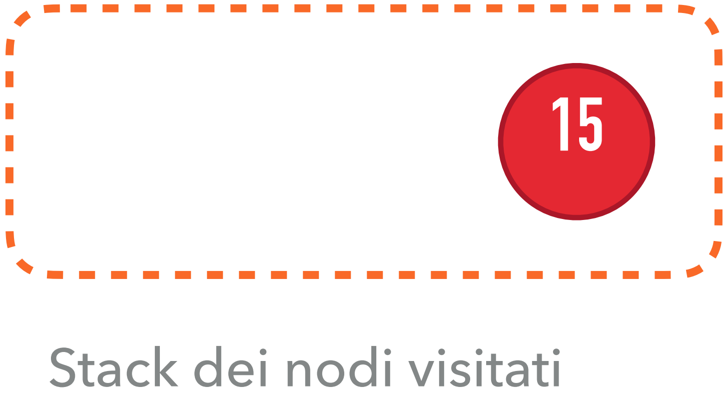
Stack dei nodi visitati

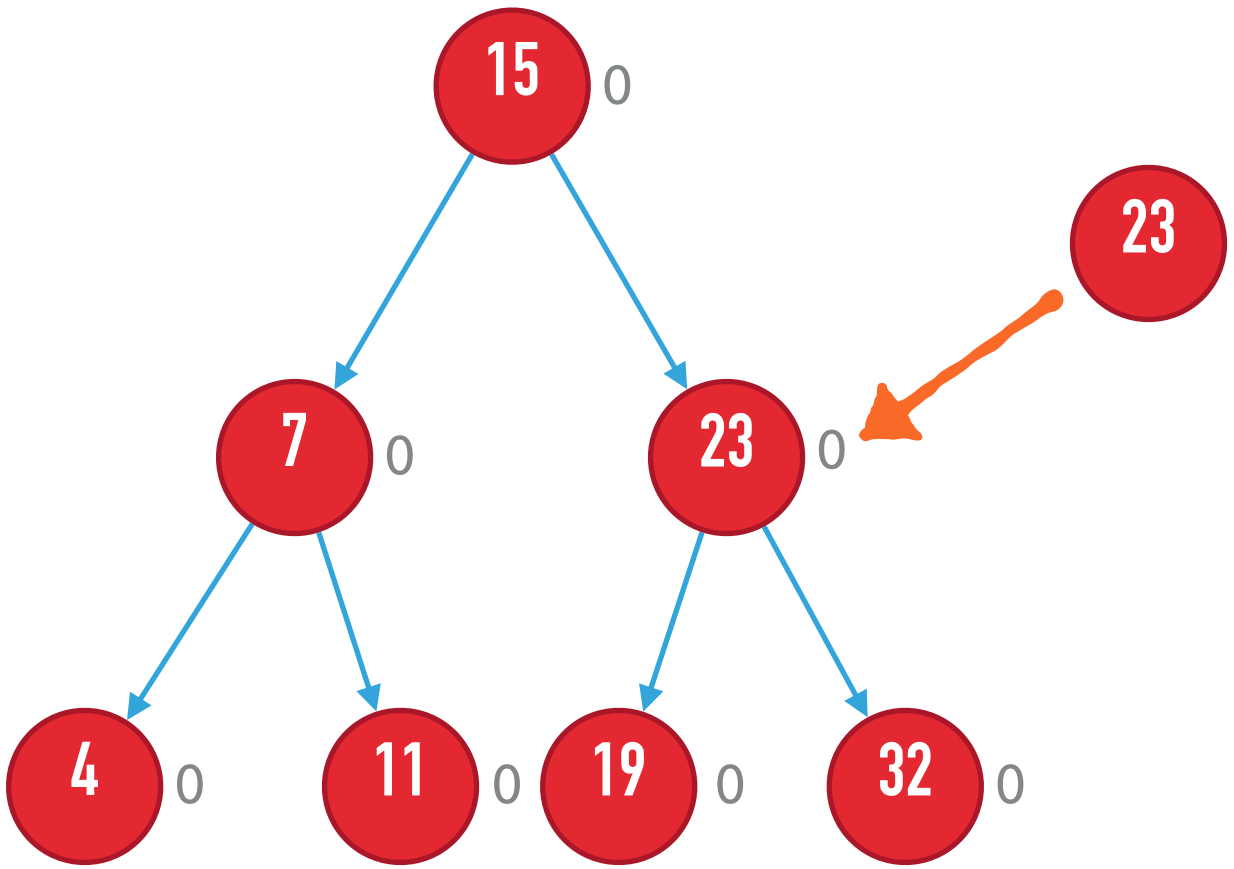


Abbiamo inserito il nodo, ora svuotiamo lo stack e aggiorniamo il bilanciamento

INSERIMENTO

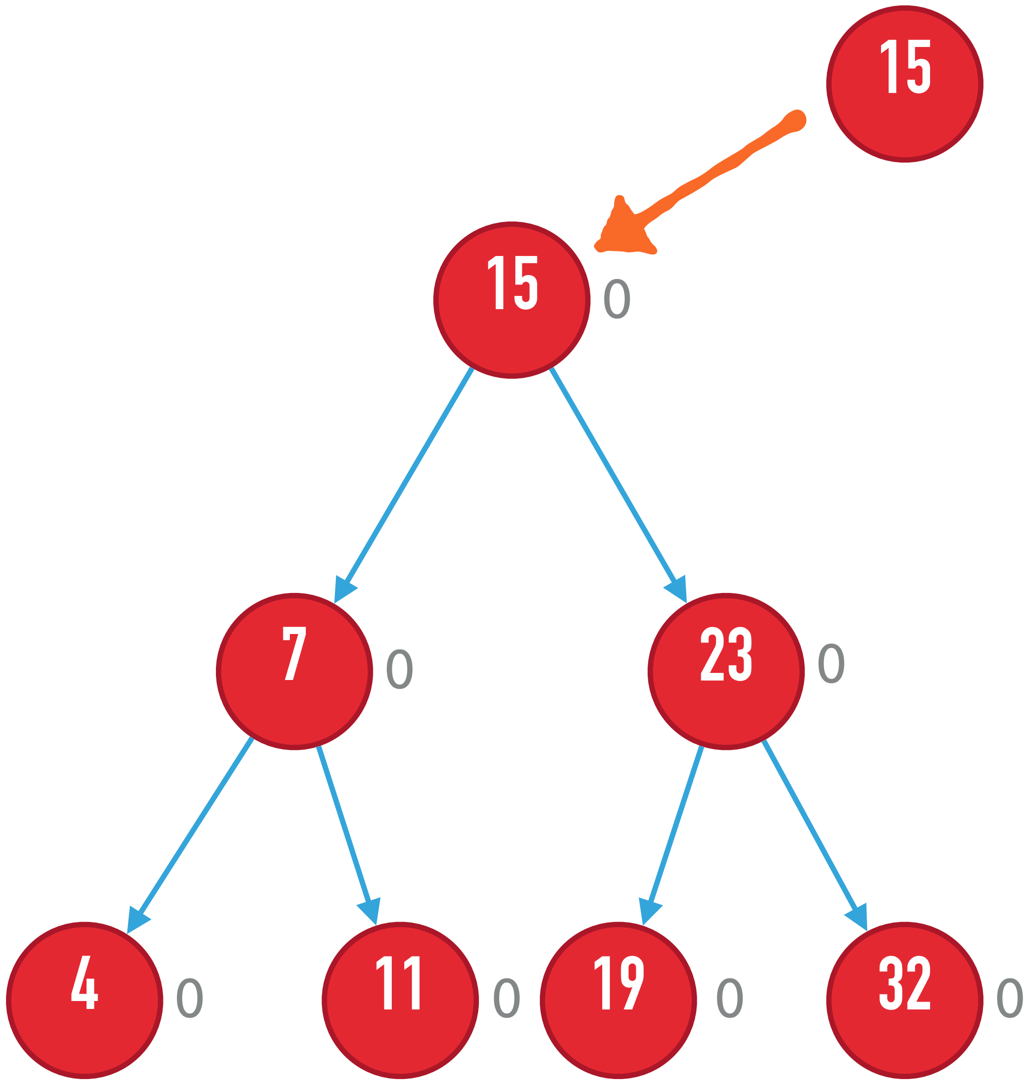
Inseriamo il nodo "19"





INSERIMENTO

Inseriamo il nodo "19"



Stack dei nodi visitati

INSERIMENTO

INSERIMENTO

- Il caso migliore è quello in cui non otteniamo nessun valore $+2$ o -2 e aggiorniamo solamente il bilanciamento

INSERIMENTO

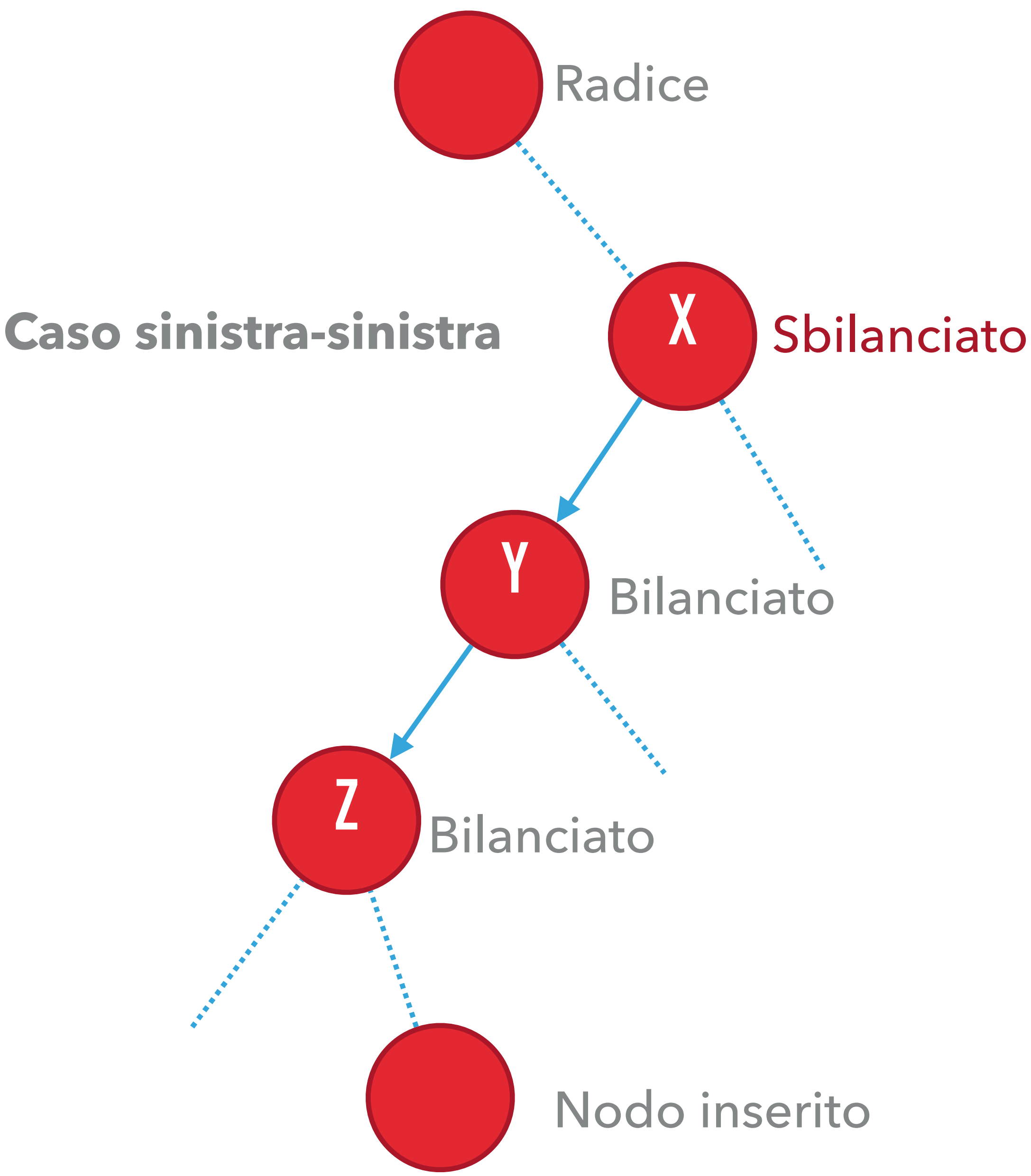
- Il caso migliore è quello in cui non otteniamo nessun valore $+2$ o -2 e aggiorniamo solamente il bilanciamento
- Notate come se c'è uno sbilanciamento, esso deve essere con un valore ± 2, dato che l'aggiunta di un nodo modifica l'altezza di al più 1.

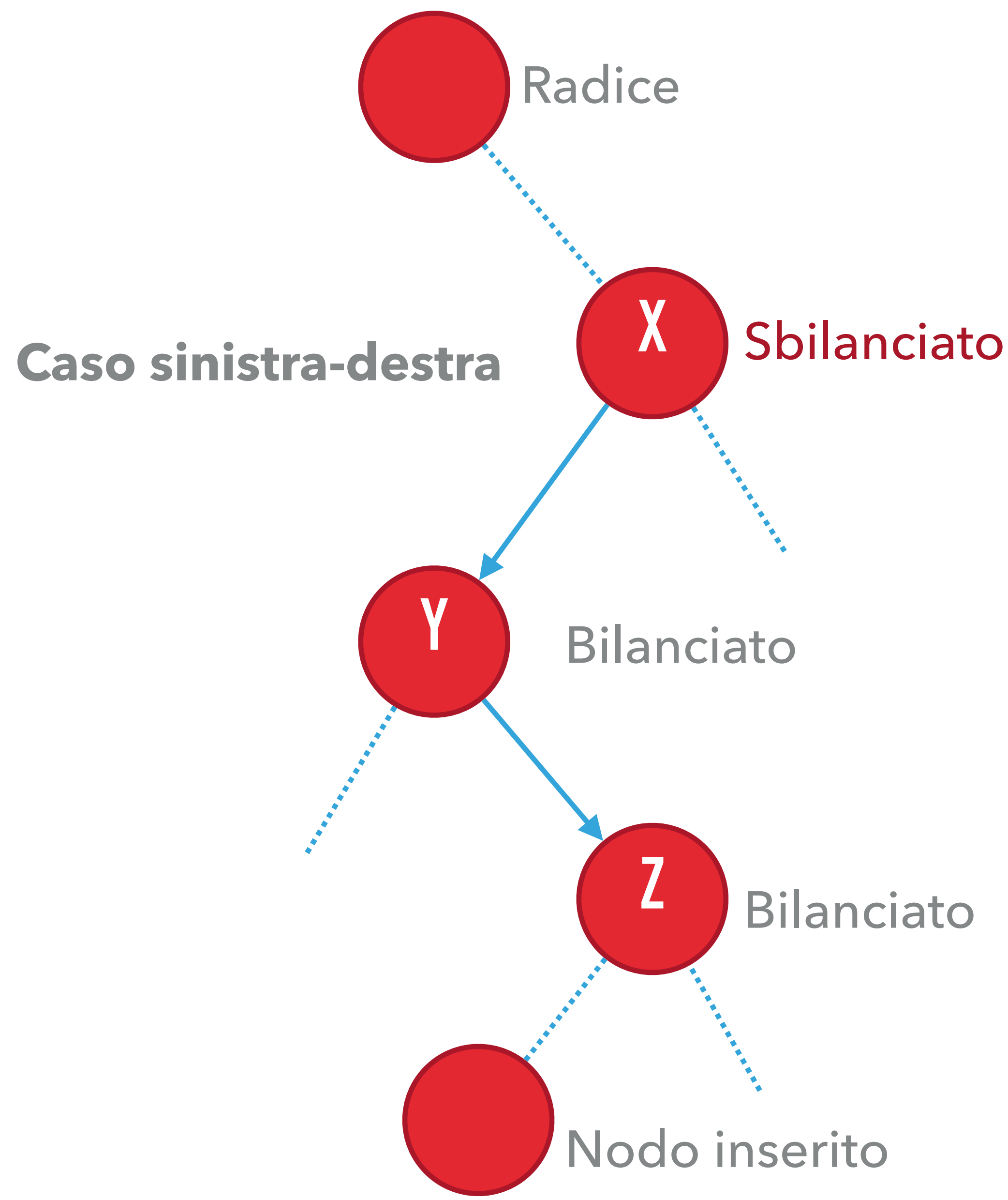
INSERIMENTO

- Il caso migliore è quello in cui non otteniamo nessun valore $+2$ o -2 e aggiorniamo solamente il bilanciamento
- Notate come se c'è uno sbilanciamento, esso deve essere con un valore ± 2, dato che l'aggiunta di un nodo modifica l'altezza di al più 1.
- Nel caso vi sia sbilanciamento cerchiamo il primo nodo – risalendo dal nodo appena inserito – che è sbilanciato.

INSERIMENTO

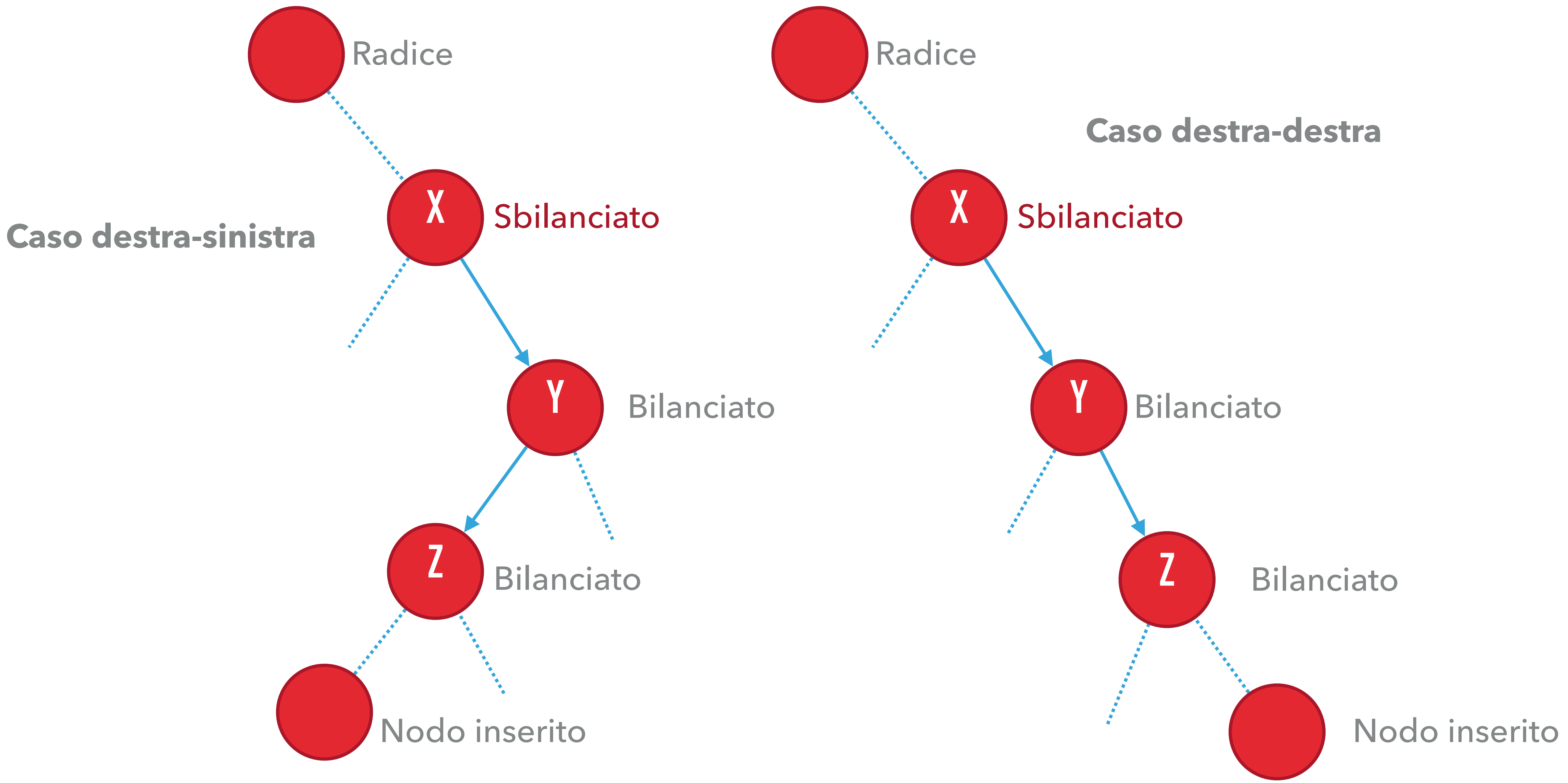
Nel percorso che va dalla radice al nodo inserito possiamo trovarci in uno di questi quattro casi:





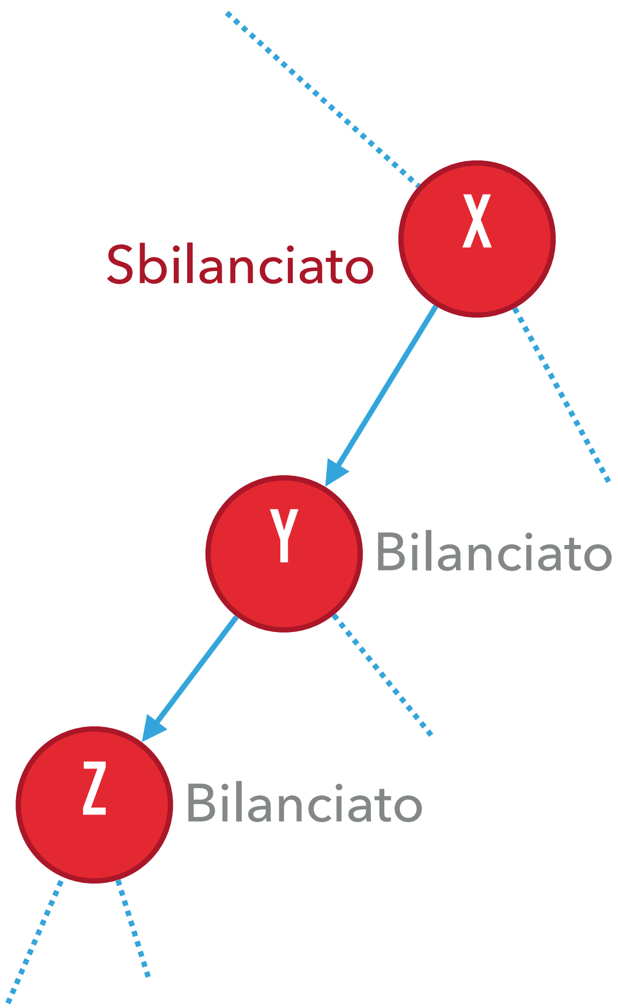
INSERIMENTO

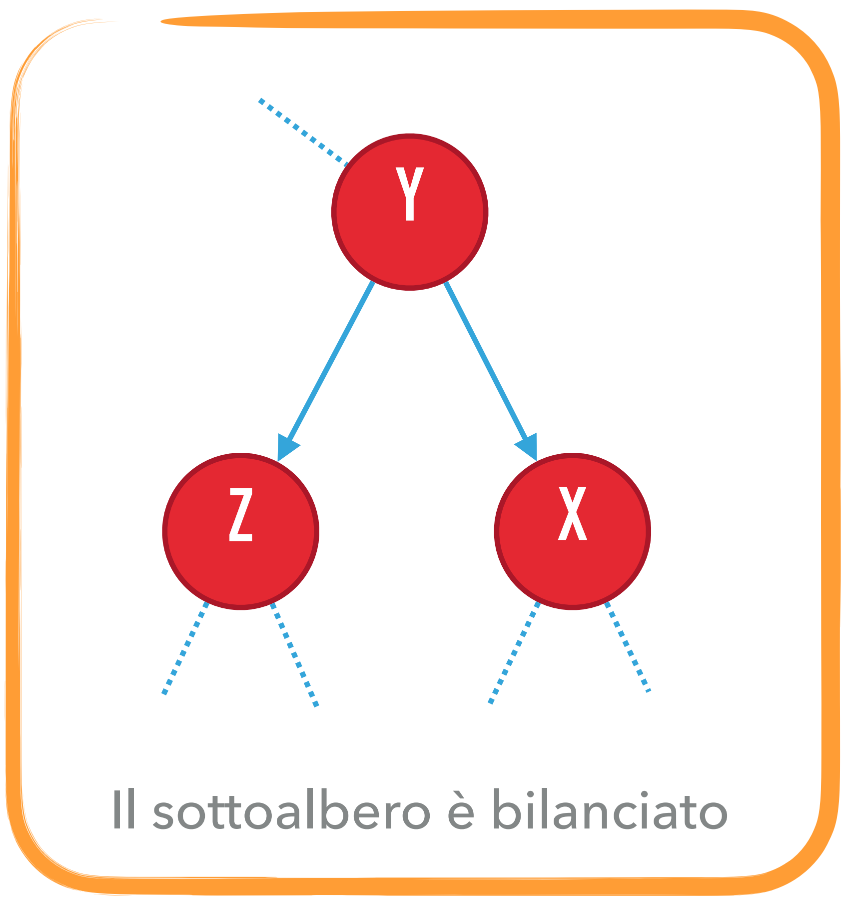
Nel percorso che va dalla radice al nodo inserito possiamo trovarci in uno di questi quattro casi:



INSERIMENTO

Rotazioni che ri-bilanciano l'albero:

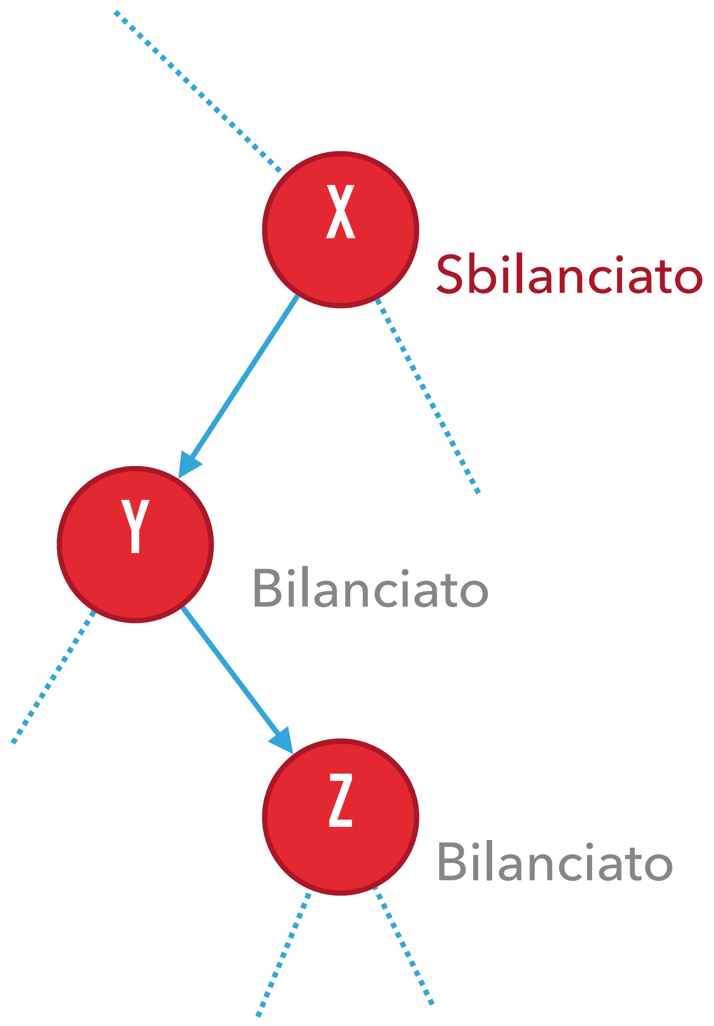


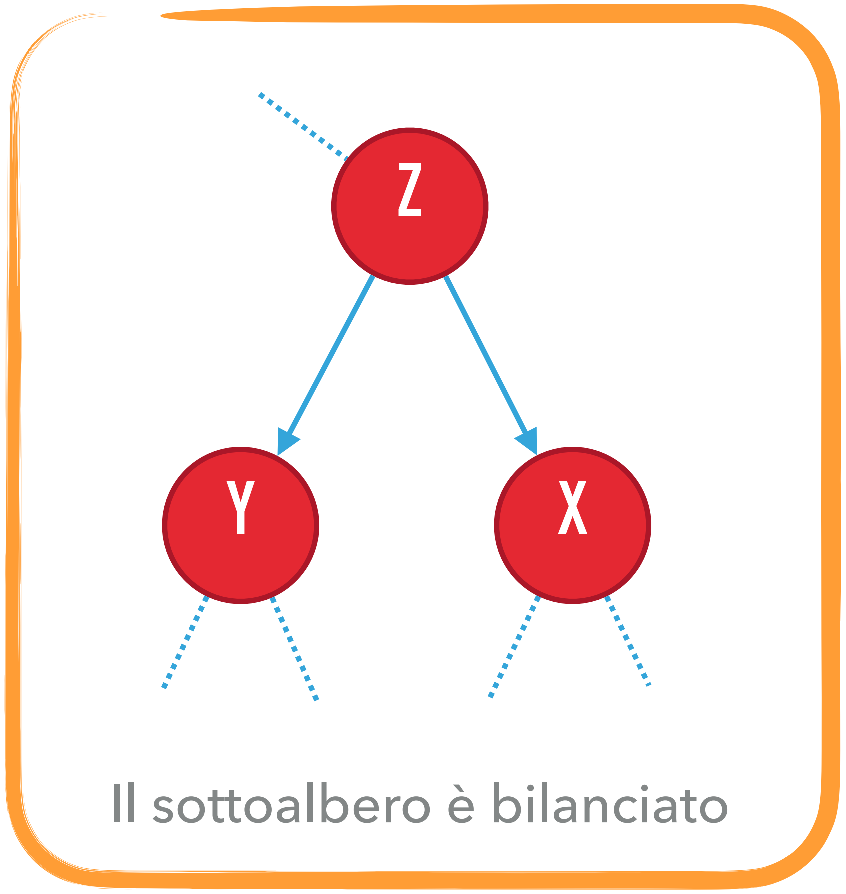


Caso sinistra-sinistra

INSERIMENTO

Rotazioni che ri-bilanciano l'albero:

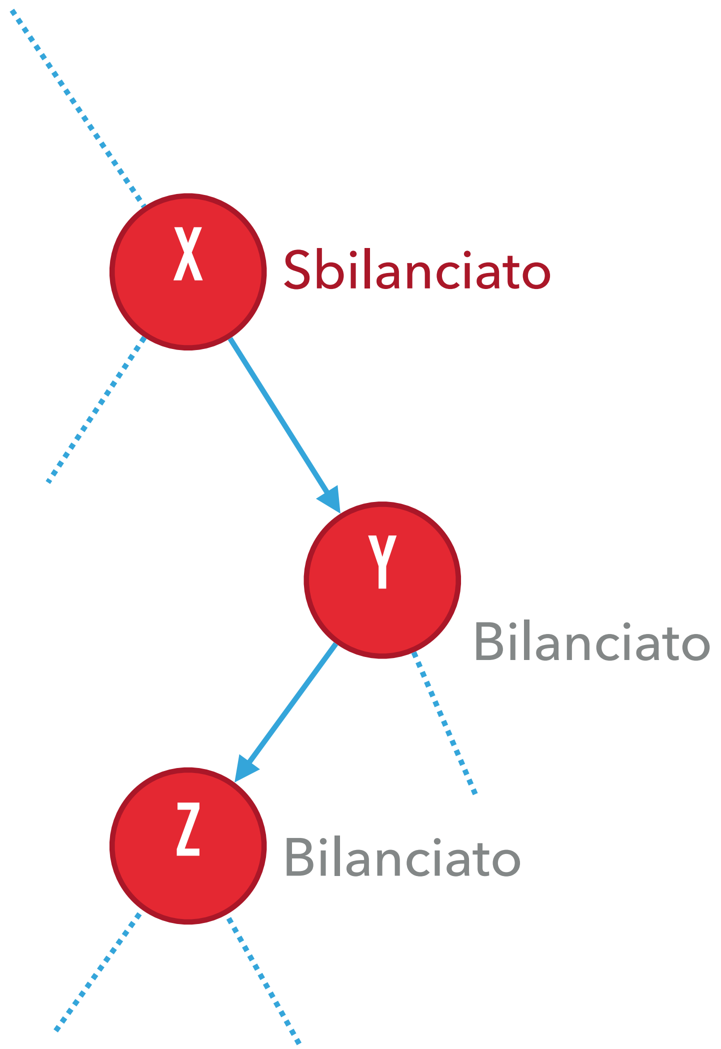




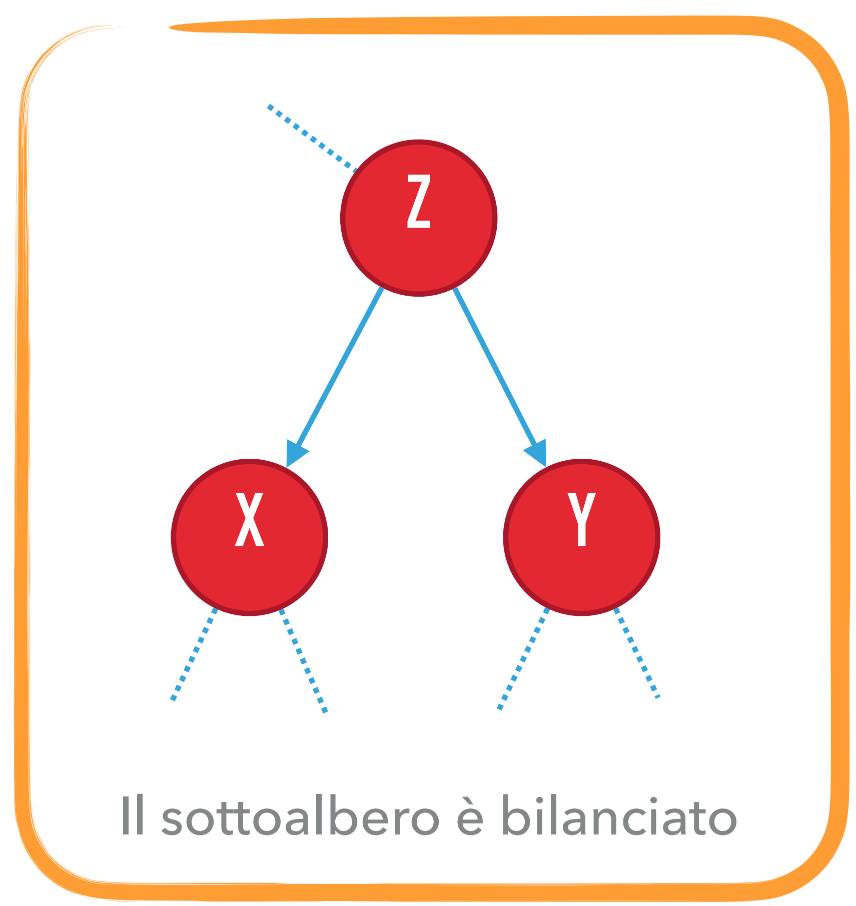
Caso sinistra-destra

INSERIMENTO

Rotazioni che ri-bilanciano l'albero:

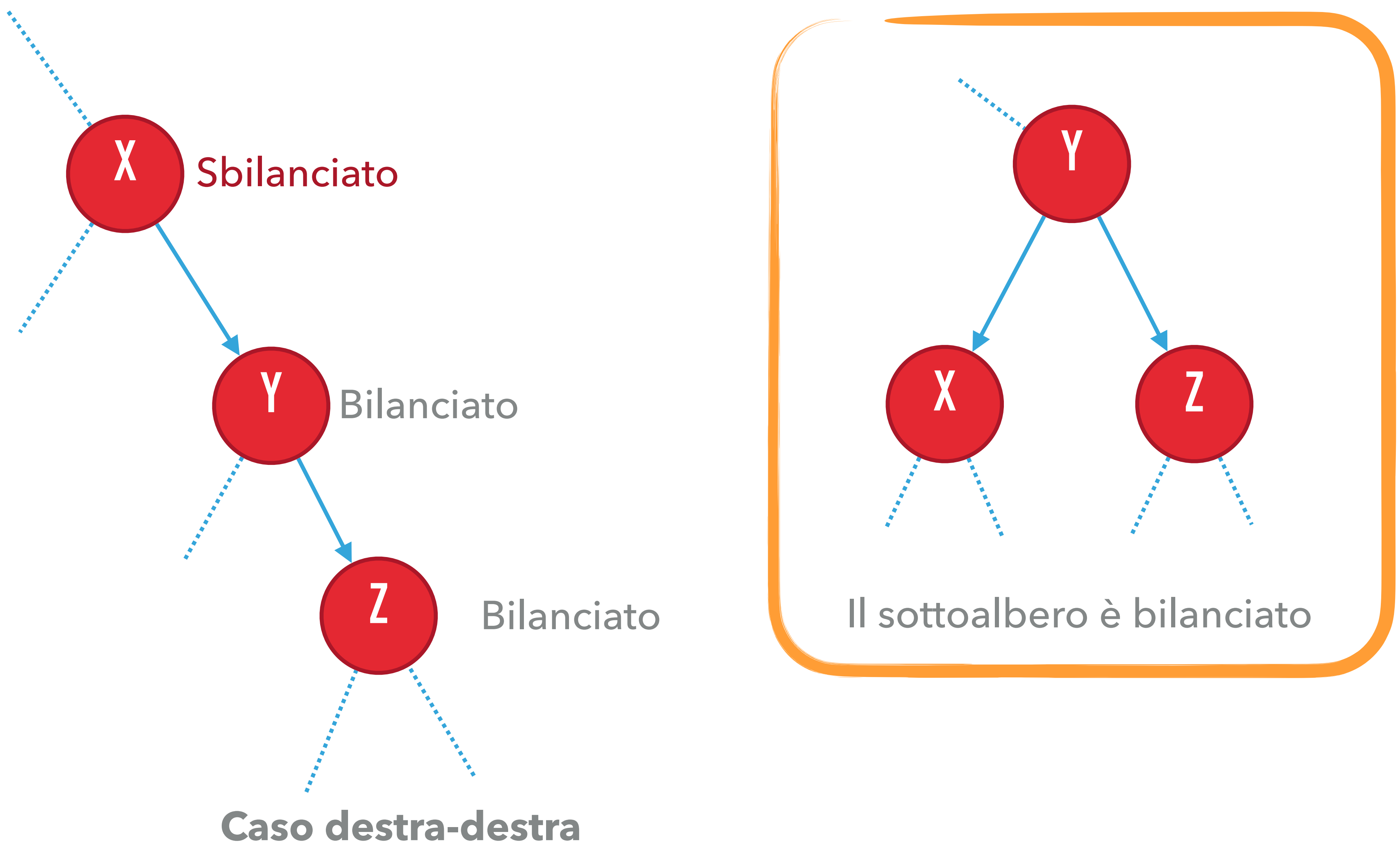


Caso destra-sinistra



INSERIMENTO

Rotazioni che ri-bilanciano l'albero:



INSERIMENTO

INSERIMENTO

- Ma come facciamo a provare che queste operazioni rendono un albero bilanciato?

INSERIMENTO

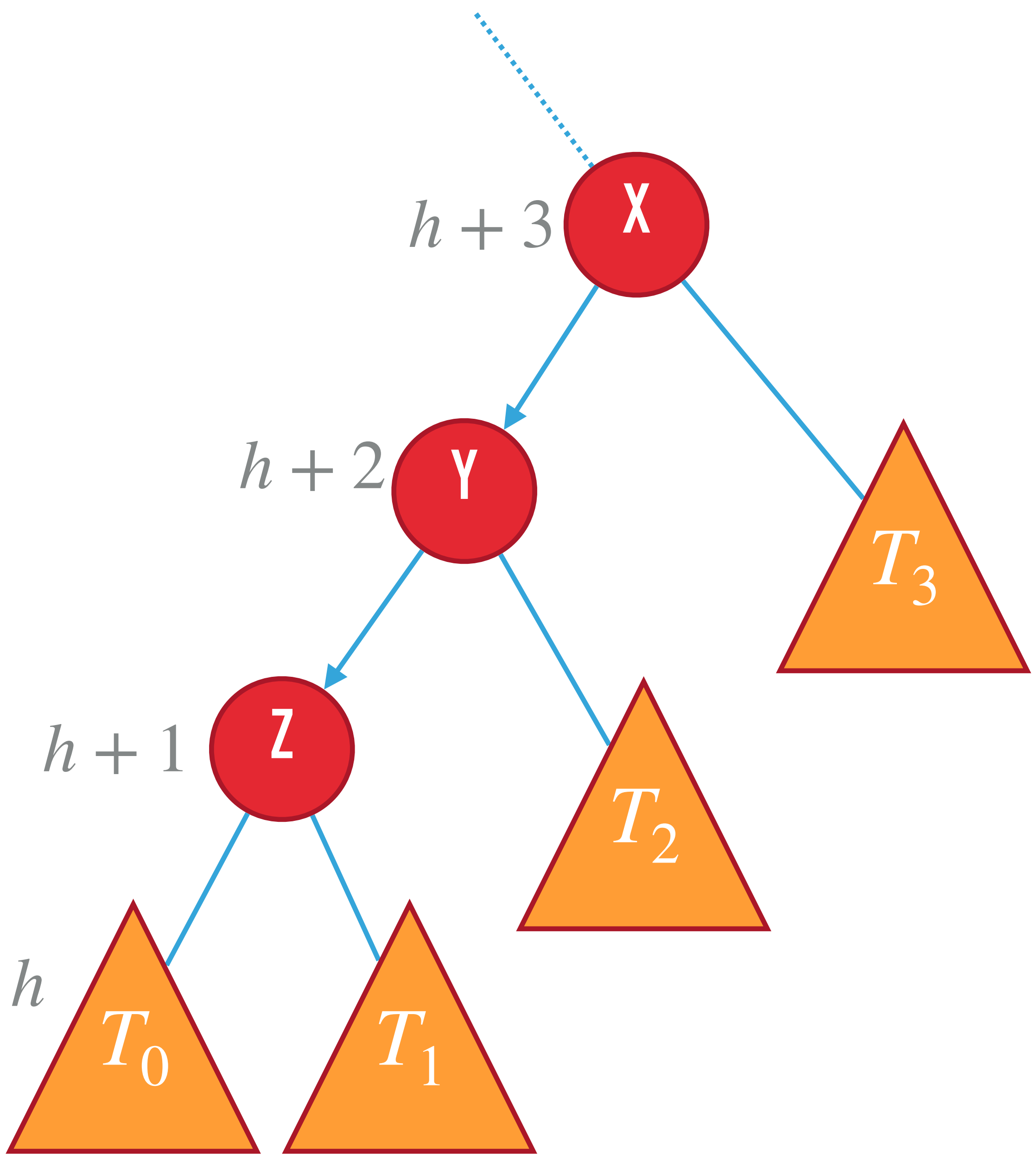
- Ma come facciamo a provare che queste operazioni rendono un albero bilanciato?
- Non è direttamente intuitivo, lo proviamo per un caso (sinistra-sinistra), per gli altri casi è equivalente

INSERIMENTO

- Ma come facciamo a provare che queste operazioni rendono un albero bilanciato?
- Non è direttamente intuitivo, lo proviamo per un caso (sinistra-sinistra), per gli altri casi è equivalente
- Associamo ad ogni nodo la sua altezza e vediamo come questa viene modificata dalle operazioni di rotazione

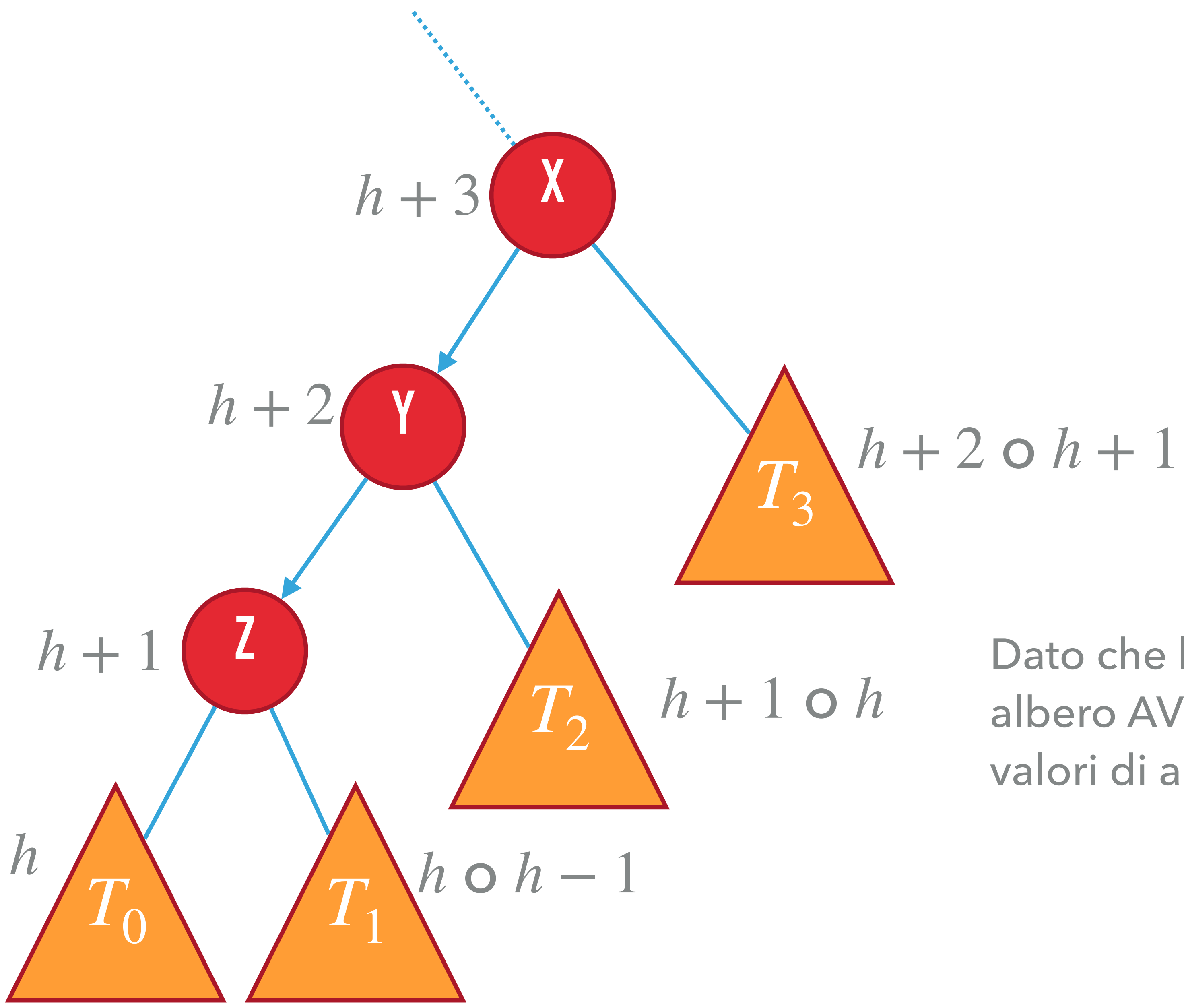
INSERIMENTO

Prima dell'inserimento (supponiamo il nuovo nodo venga inserito in T_0



INSERIMENTO

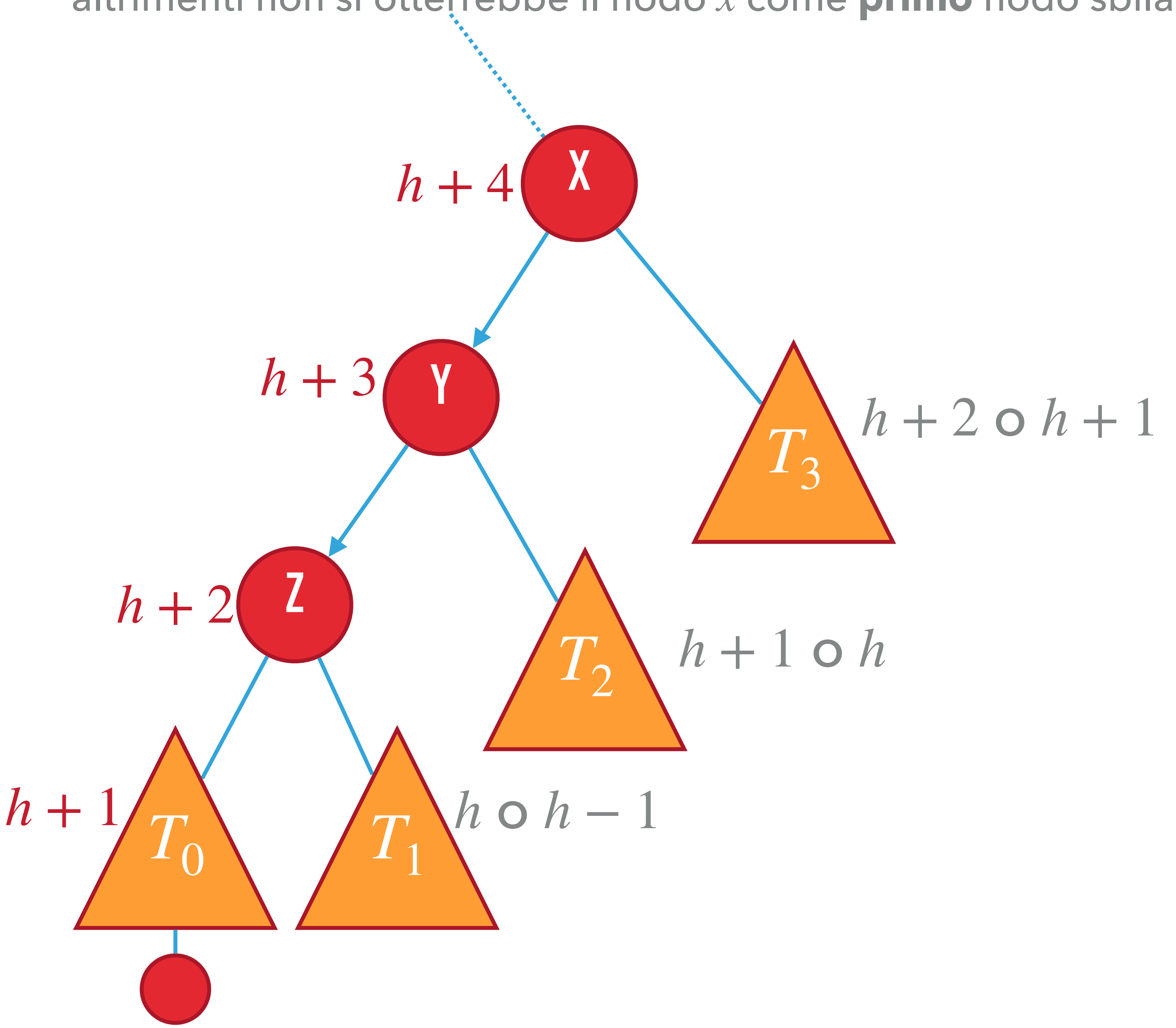
Prima dell'inserimento (supponiamo il nuovo nodo venga inserito in T_0



Dato che l'albero di partenza è un albero AVL abbiamo questi possibili valori di altezze

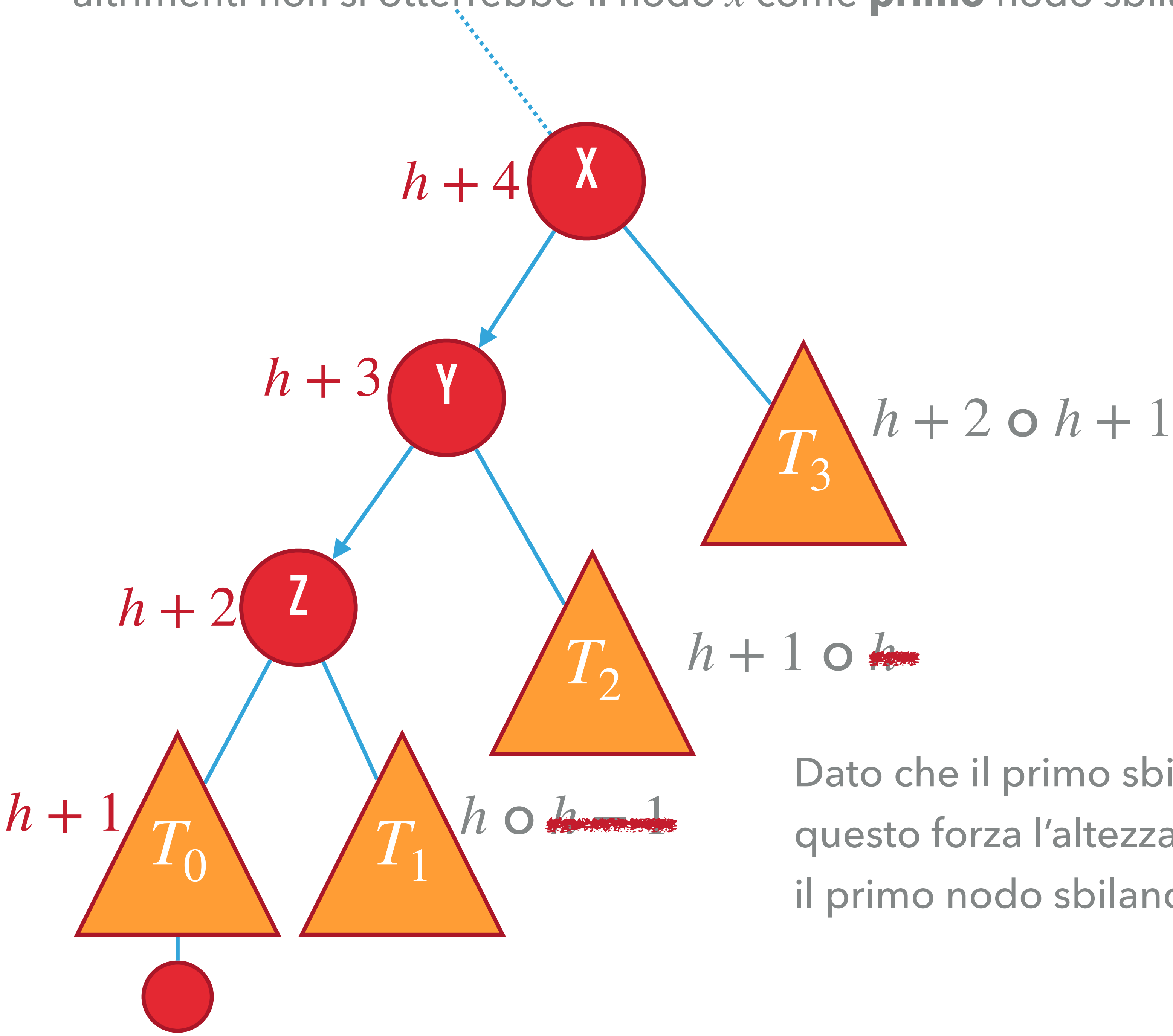
INSERIMENTO

Dopo l'inserimento sappiamo che alcune altezze si modificano, altrimenti non si otterrebbe il nodo x come **primo** nodo sbilanciato



INSERIMENTO

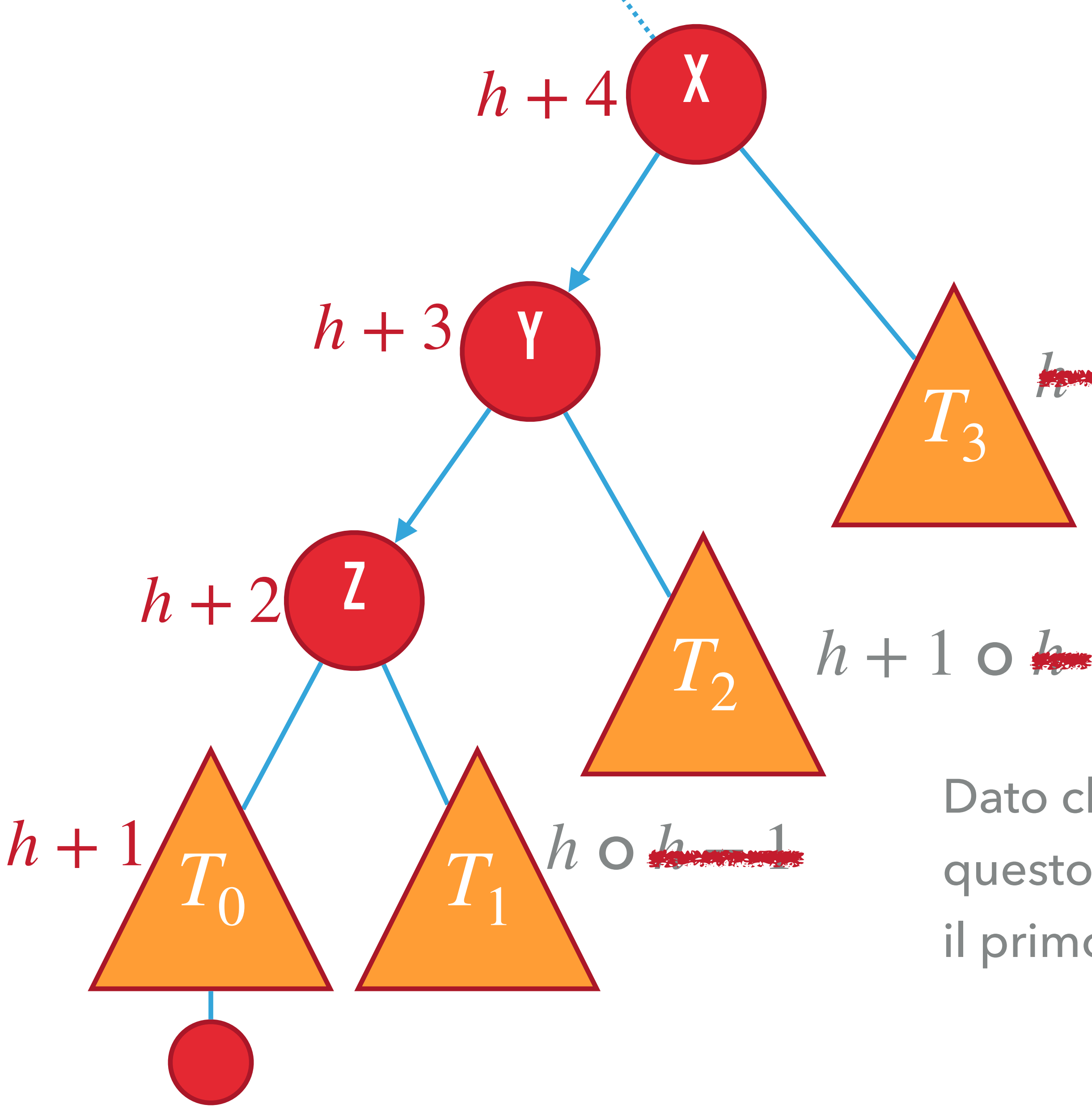
Dopo l'inserimento sappiamo che alcune altezze si modificano, altrimenti non si otterrebbe il nodo x come **primo** nodo sbilanciato



Dato che il primo sbilanciamento è in x, questo forza l'altezza di T_1 e T_2. Altrimenti il primo nodo sbilanciato sarebbe z o y

INSERIMENTO

Dopo l'inserimento sappiamo che alcune altezze si modificano, altrimenti non si otterrebbe il nodo x come **primo** nodo sbilanciato

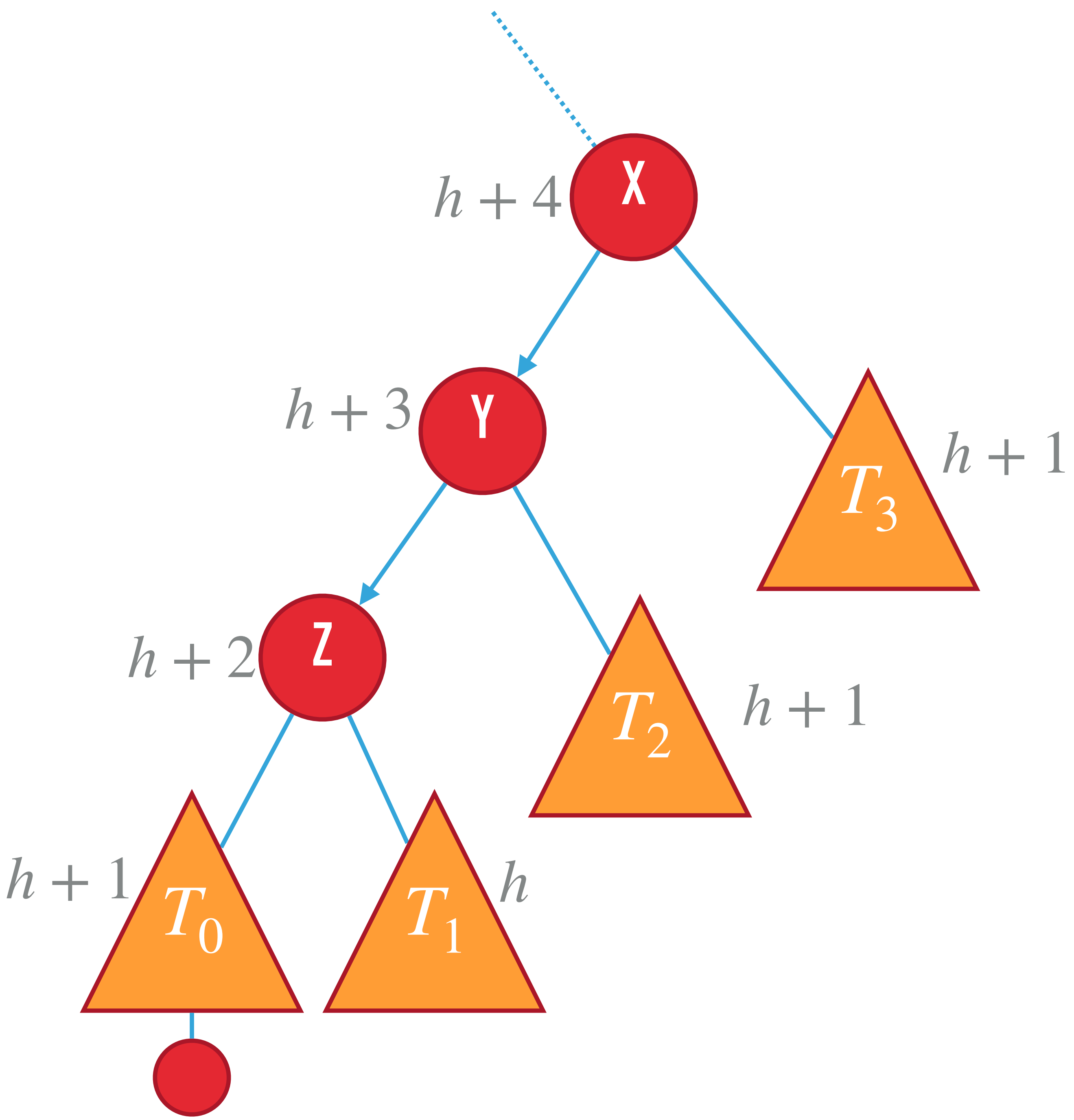


Dato che x è sbilanciato, T_3 doveva avere altezza $h+1$, altrimenti l'inserimento non avrebbe sbilanciato x

Dato che il primo sbilanciamento è in x, questo forza l'altezza di T_1 e T_2. Altrimenti il primo nodo sbilanciato sarebbe z o y

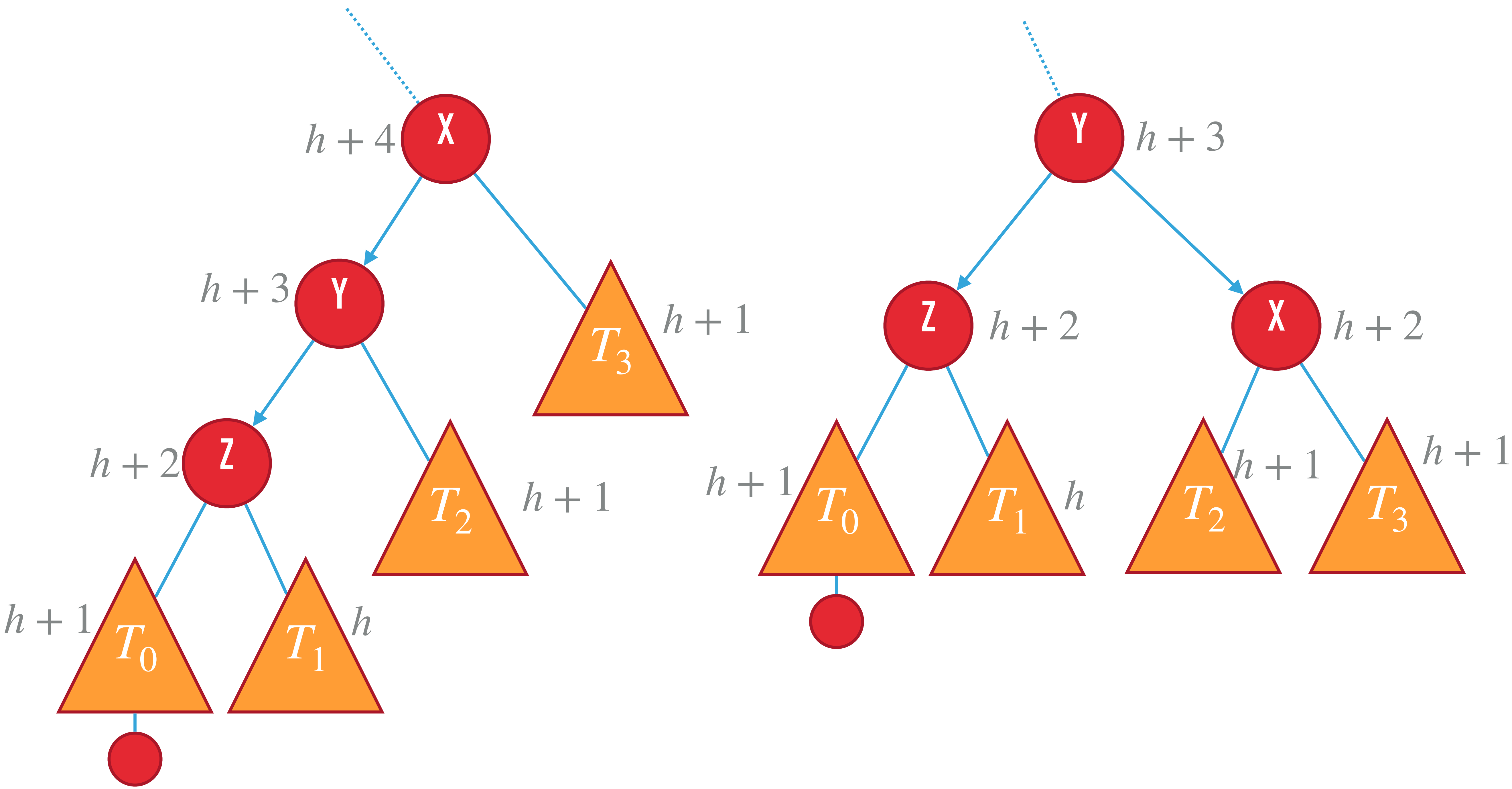
INSERIMENTO

Se effettuiamo la rotazione notiamo come la proprietà degli alberi AVL venga ripristinata



INSERIMENTO

Se effettuiamo la rotazione notiamo come la proprietà degli alberi AVL venga ripristinata



INSERIMENTO

INSERIMENTO

- Abbiamo visto che per un caso le rotazioni ribilanciano il sottoalbero.

INSERIMENTO

- Abbiamo visto che per un caso le rotazioni ribilanciano il sottoalbero.
- Queste rotazioni possono creare problemi più in altro nell'albero?

INSERIMENTO

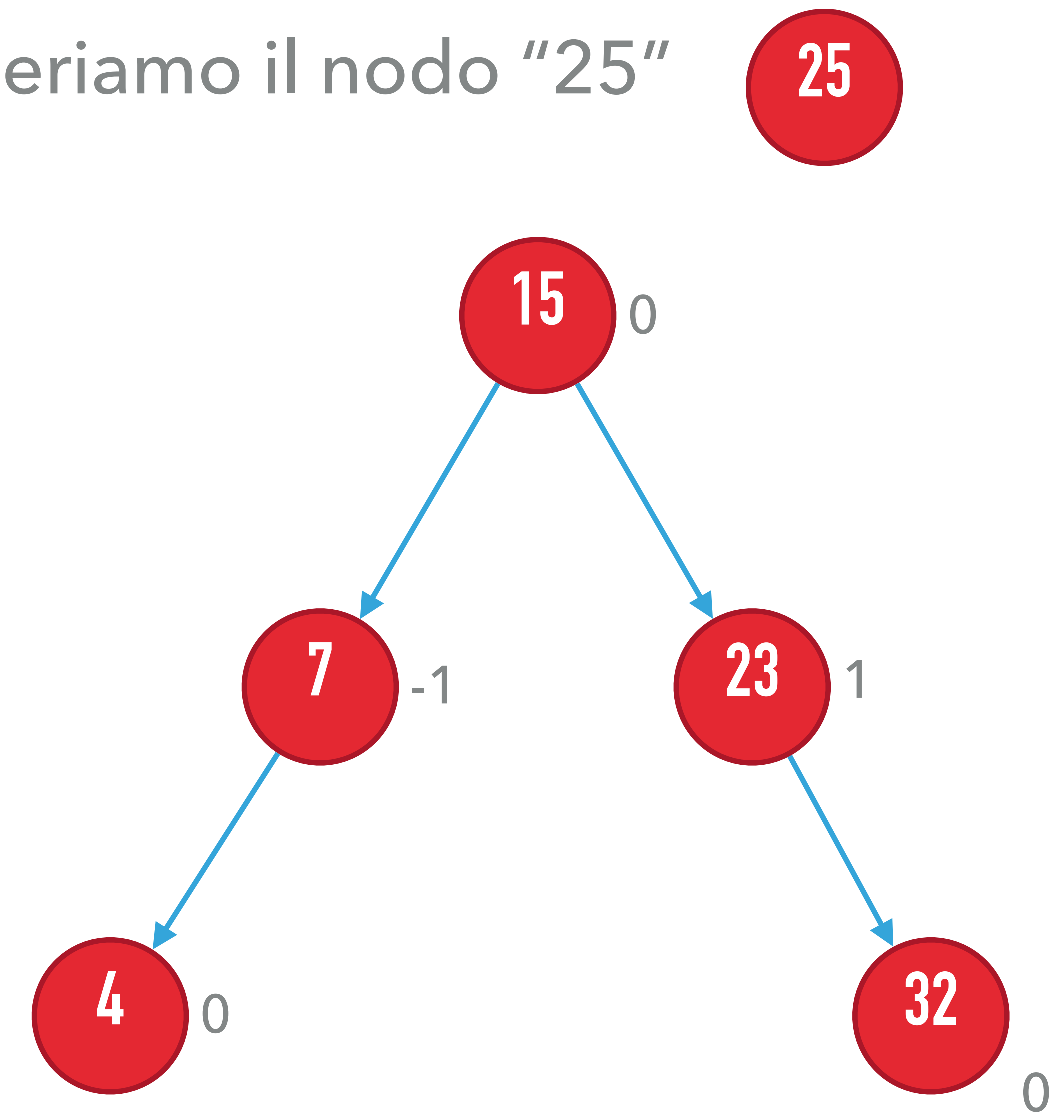
- Abbiamo visto che per un caso le rotazioni ribilanciano il sottoalbero.
- Queste rotazioni possono creare problemi più in altro nell'albero?
- No, perché l'albero ottenuto dopo le rotazioni ha esattamente la stessa altezza $h + 3$ dell'albero che **prima** dell'inserimento

INSERIMENTO

- Abbiamo visto che per un caso le rotazioni ribilanciano il sottoalbero.
- Queste rotazioni possono creare problemi più in altro nell'albero?
- No, perché l'albero ottenuto dopo le rotazioni ha esattamente la stessa altezza $h+3$ dell'albero che **prima** dell'inserimento
- Quindi se i nodi precedenti erano bilanciati prima dell'inserimento lo rimangono anche dopo

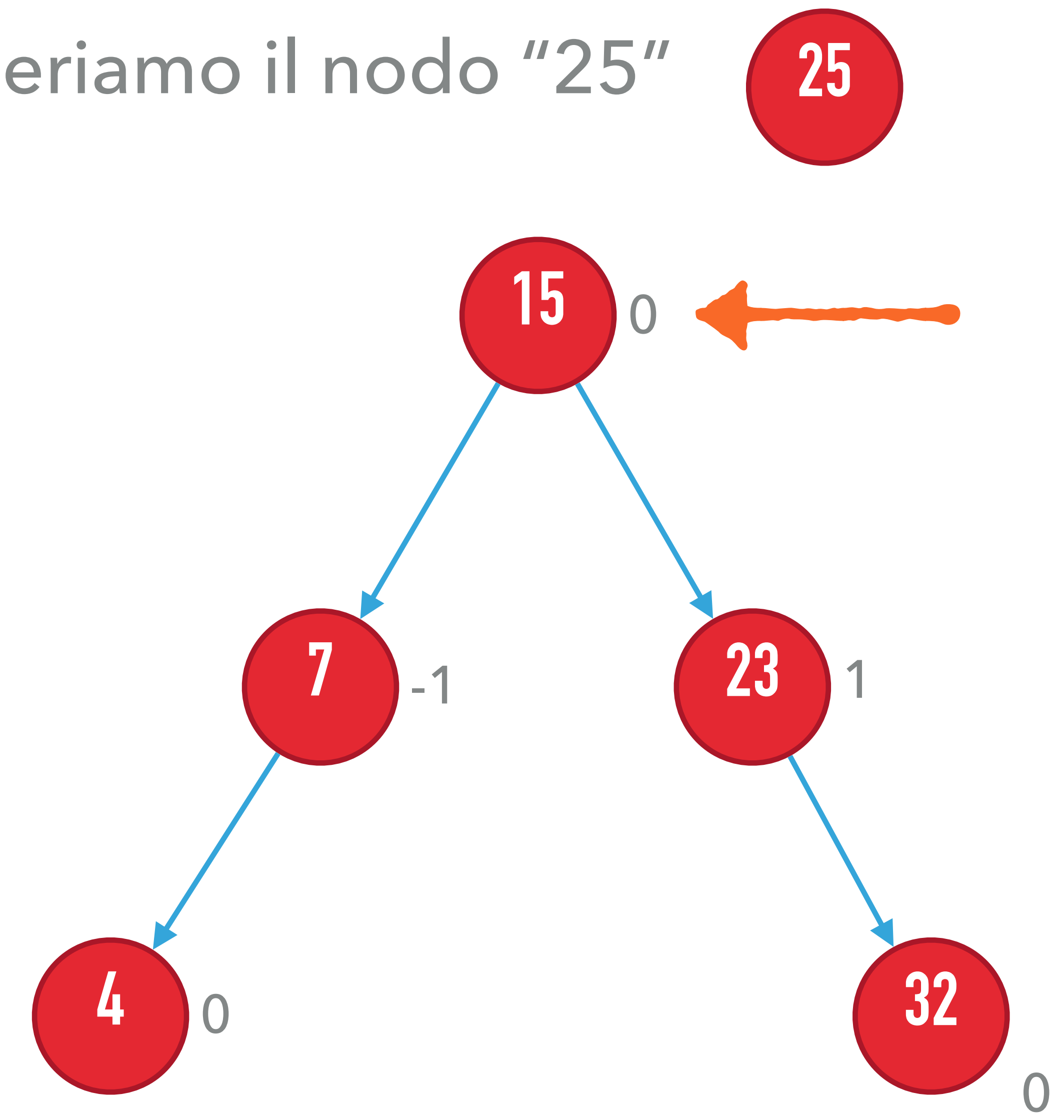
INSERIMENTO

Inseriamo il nodo "25"



INSERIMENTO

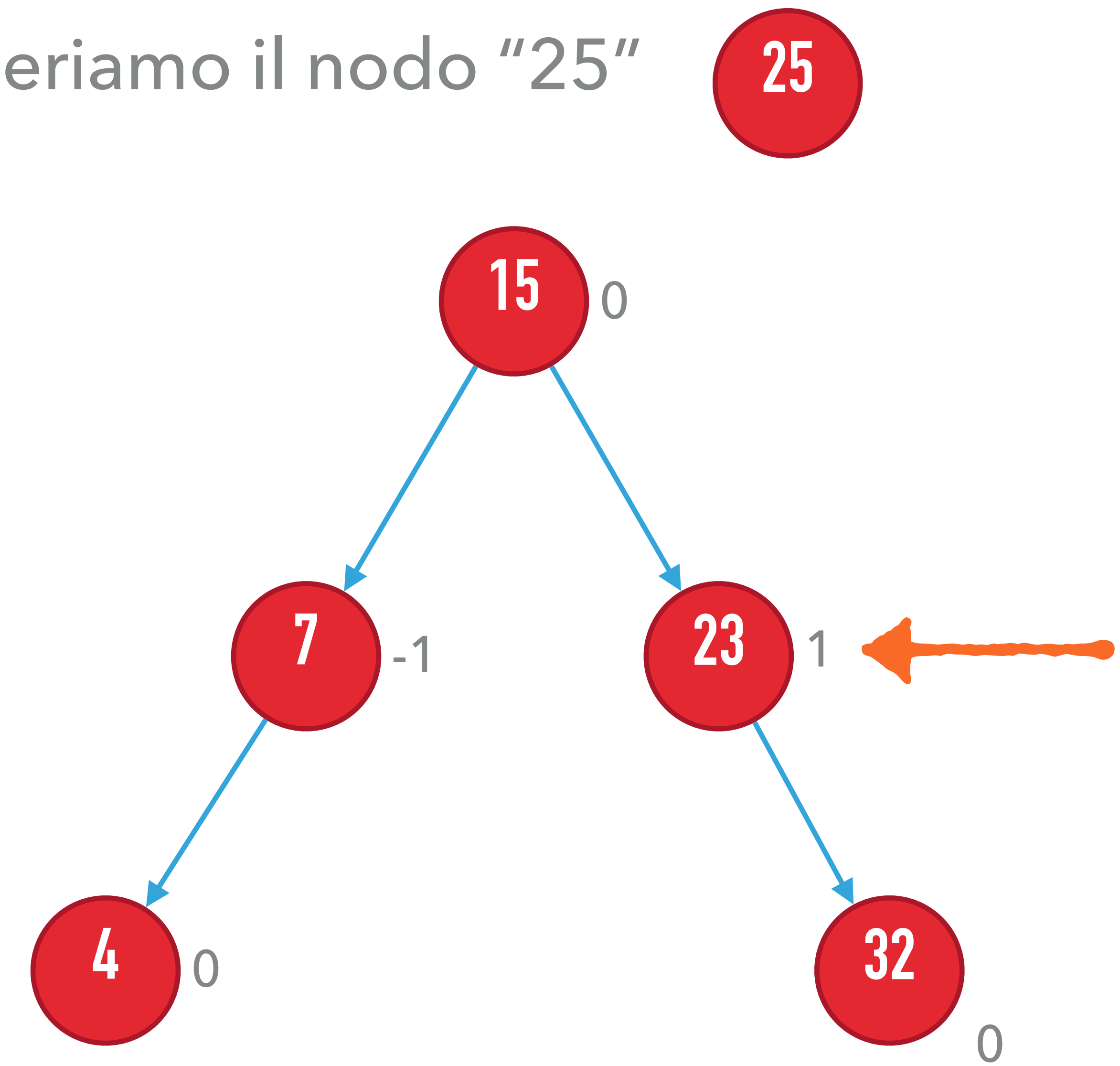
Inseriamo il nodo “25”

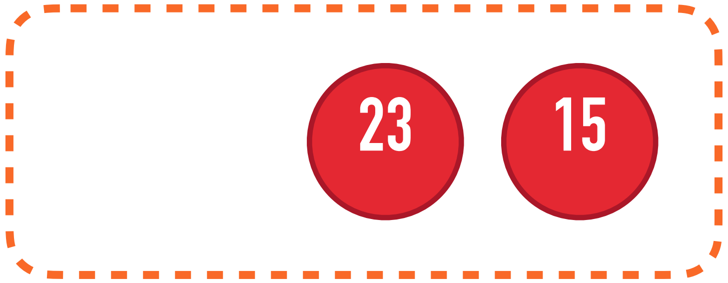


Stack dei nodi visitati

INSERIMENTO

Inseriamo il nodo "25"

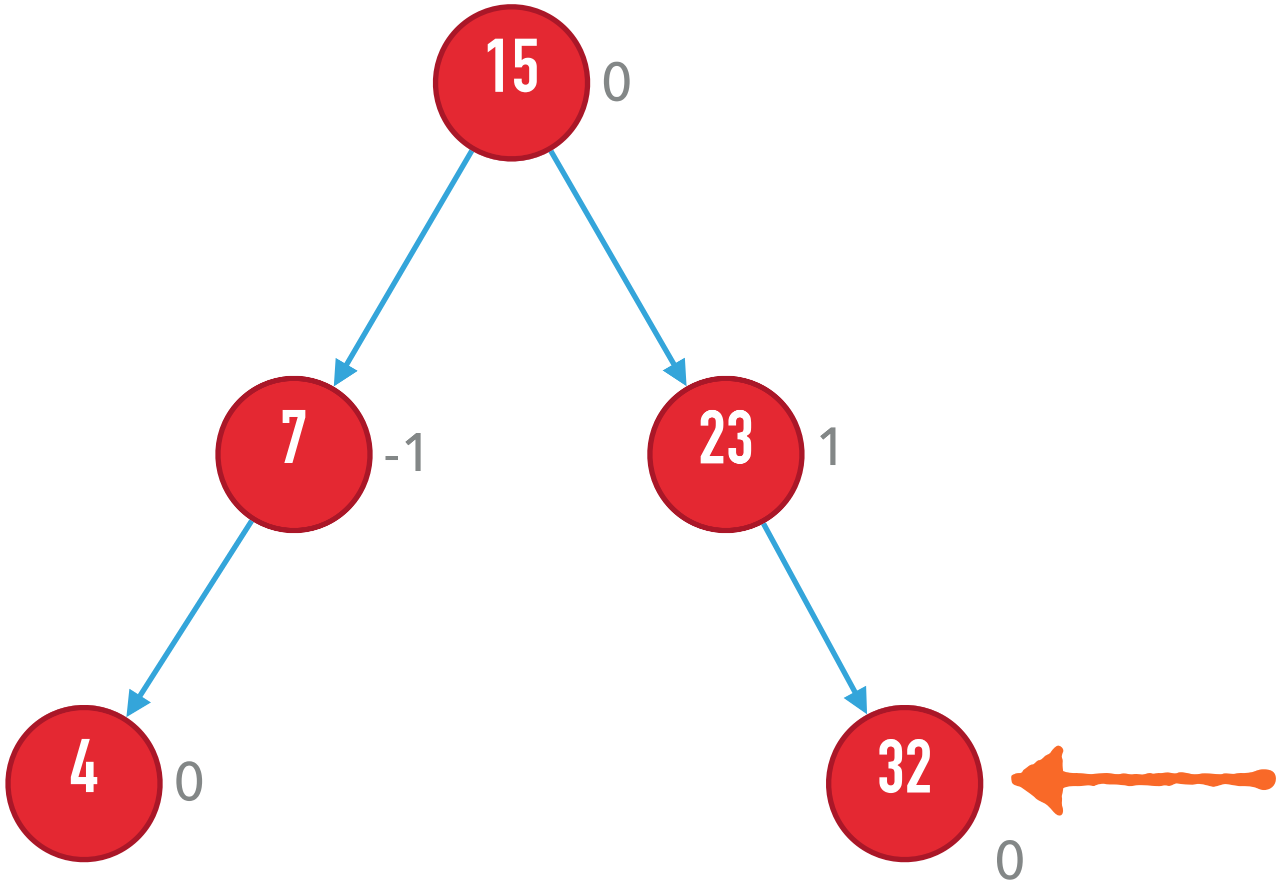


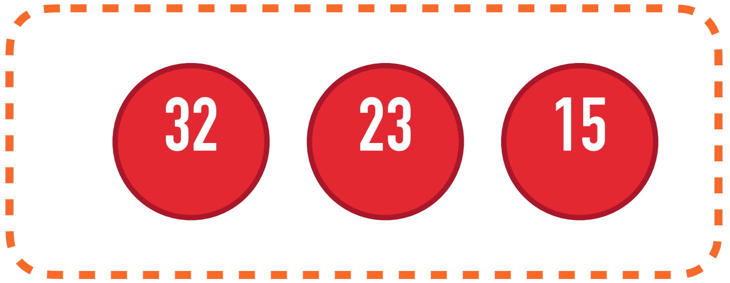


Stack dei nodi visitati

INSERIMENTO

Inseriamo il nodo “25”

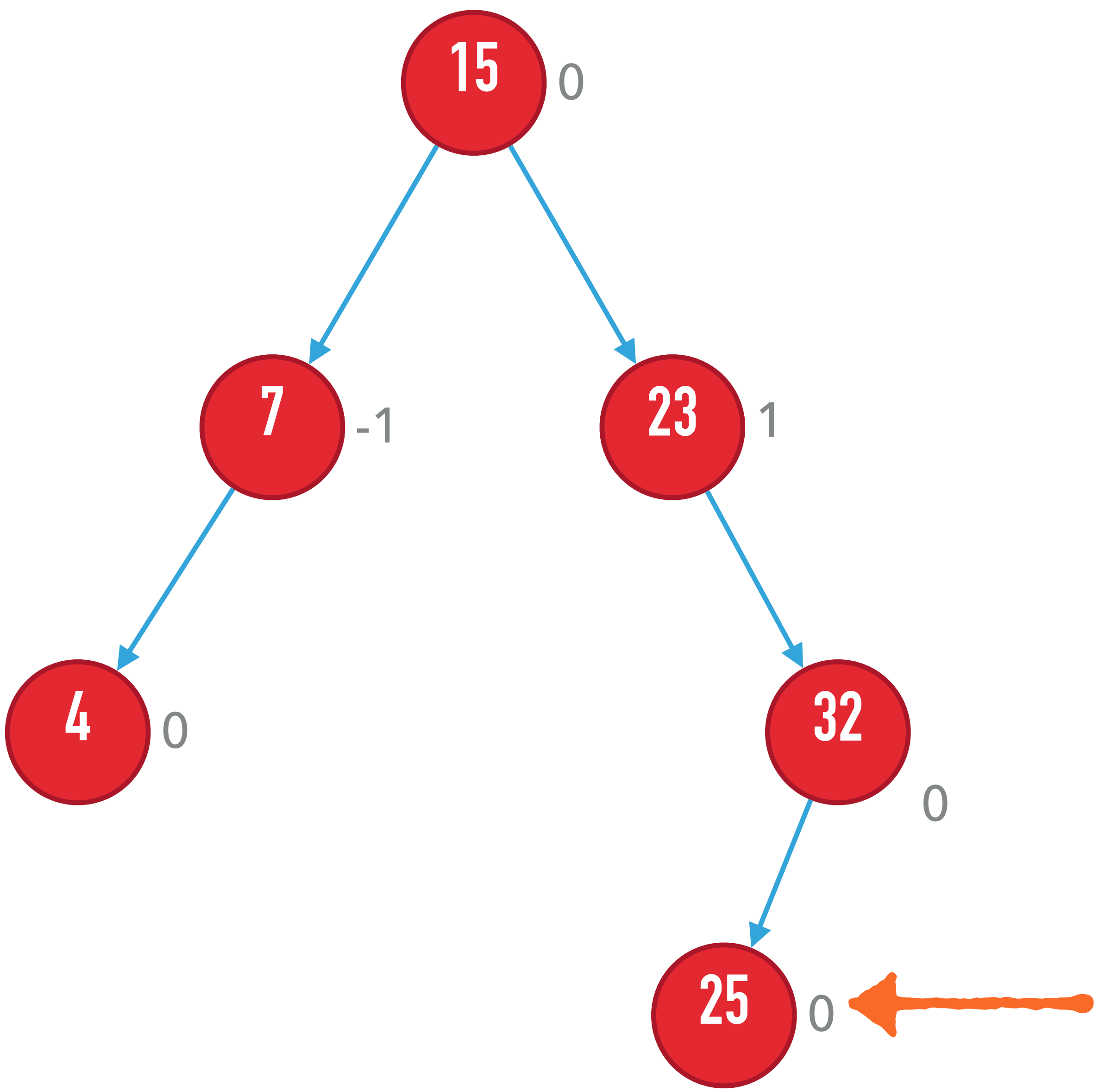


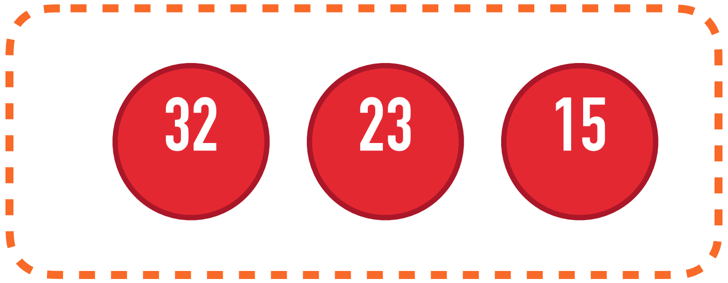


Stack dei nodi visitati

INSERIMENTO

Inseriamo il nodo “25”



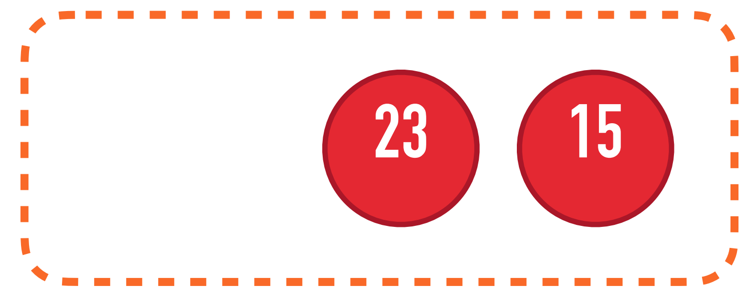


Stack dei nodi visitati

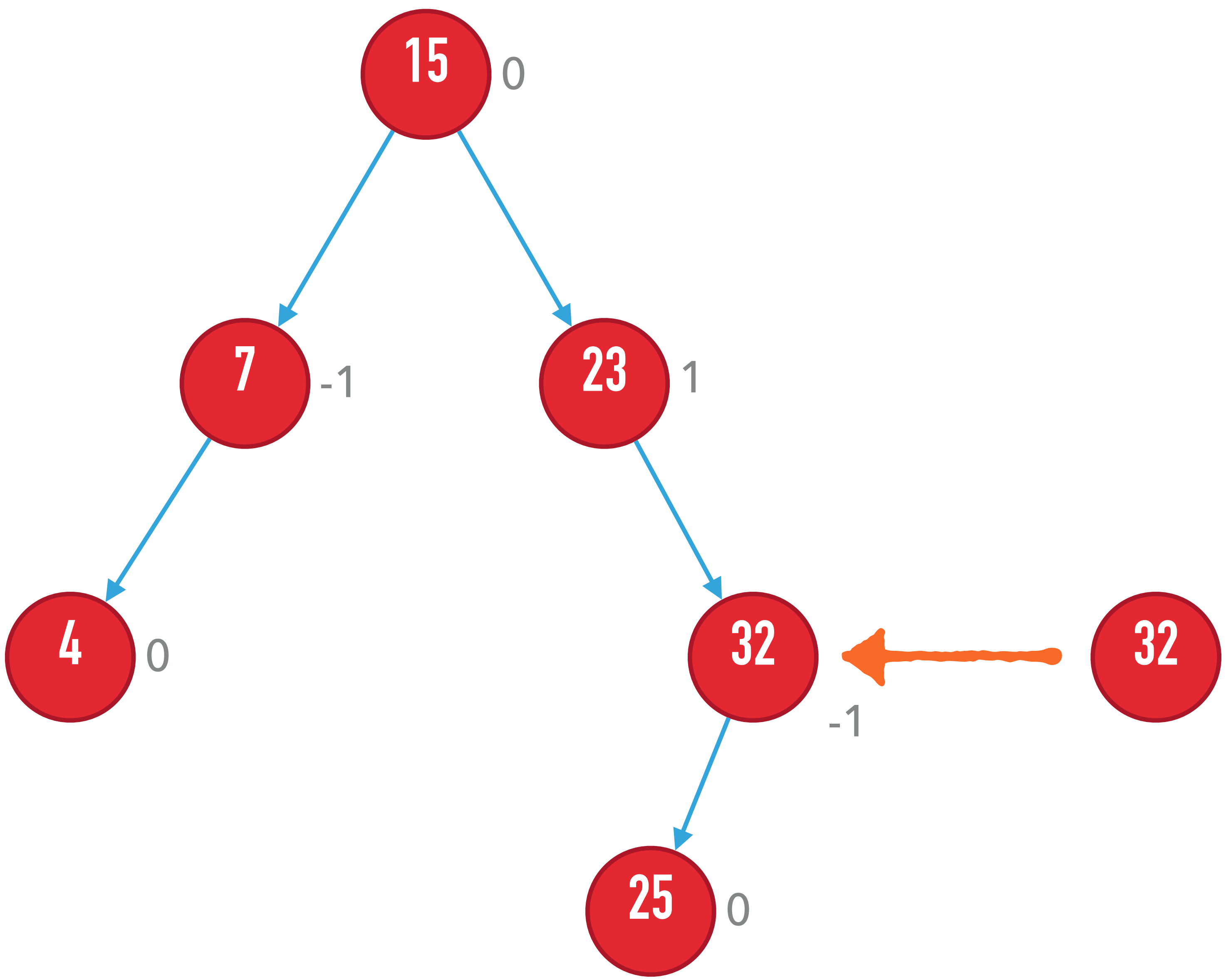
Inseriamo il nodo ed iniziamo ad aggiornare lo sbilanciamento

INSERIMENTO

Inseriamo il nodo "25"

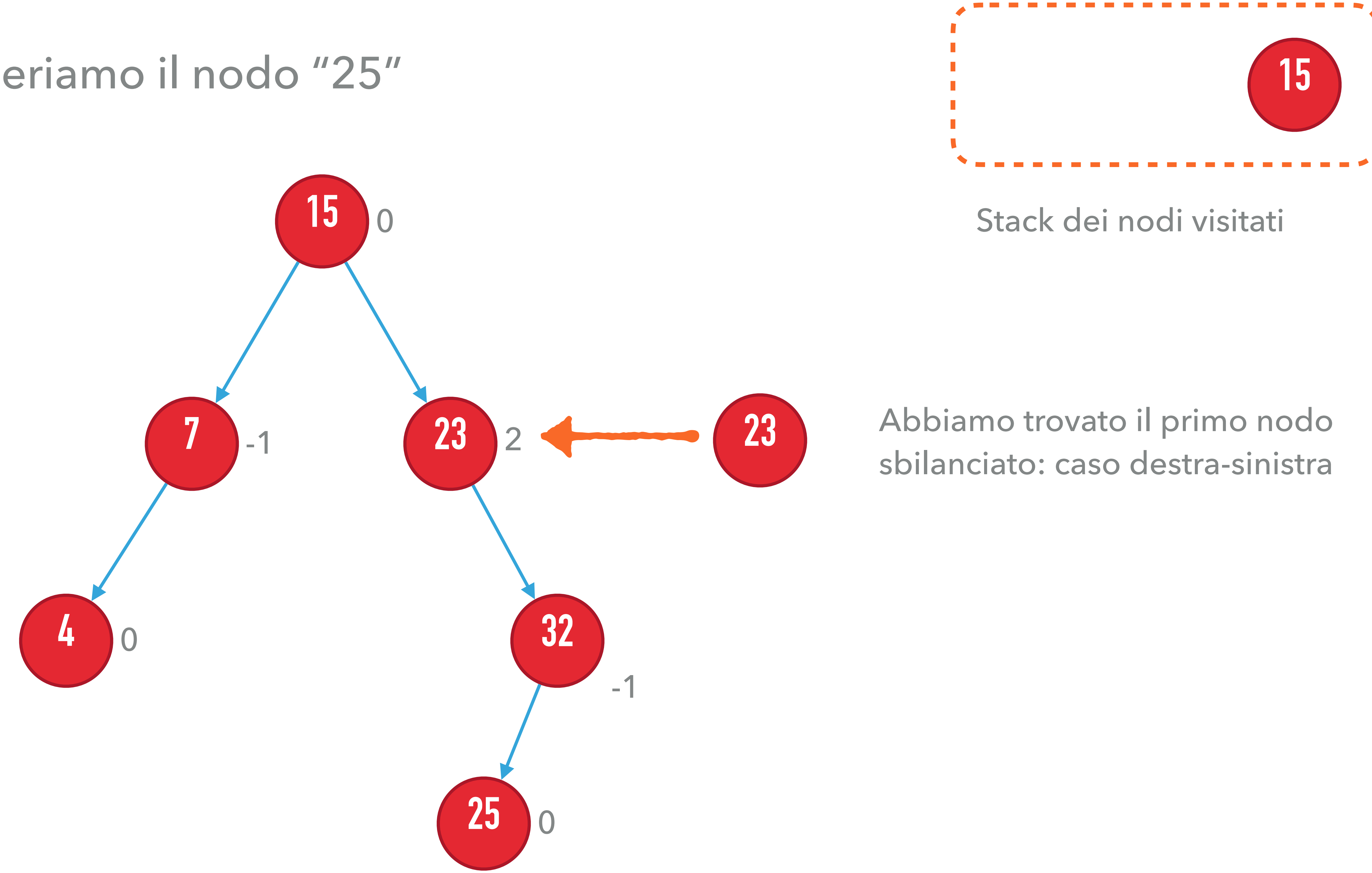


Stack dei nodi visitati



INSERIMENTO

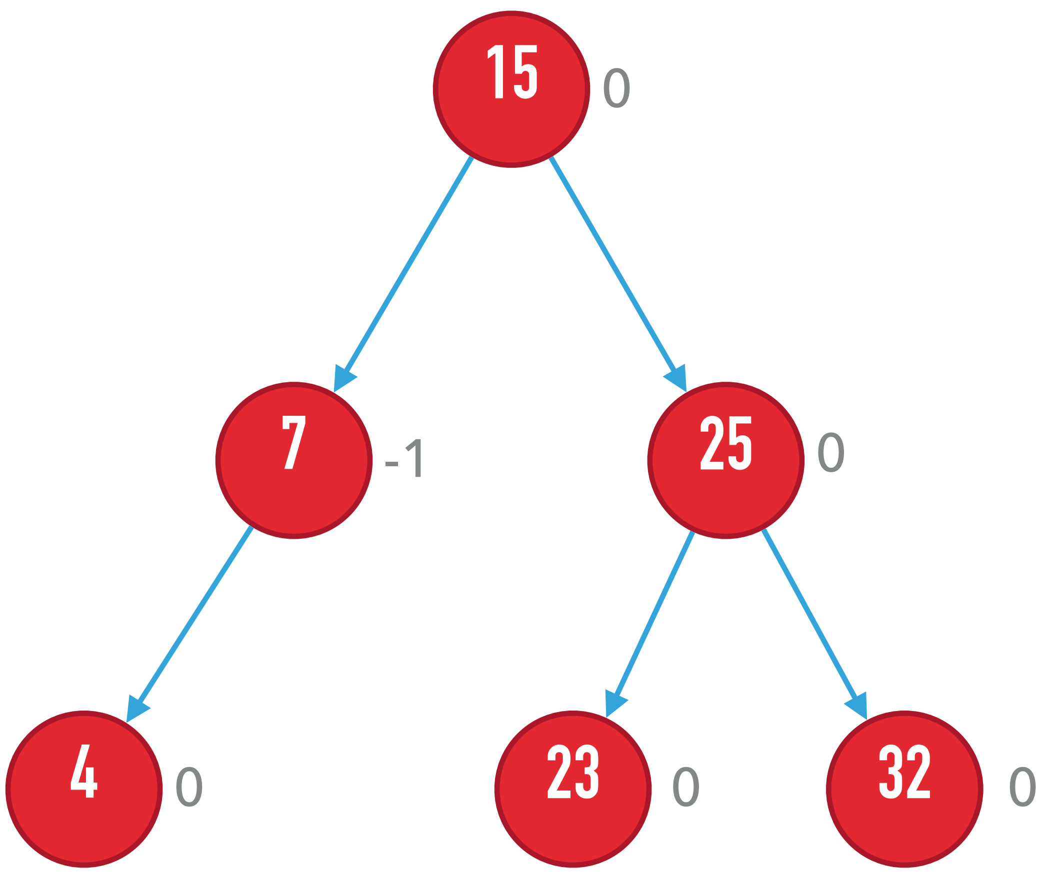
Inseriamo il nodo "25"



Abbiamo trovato il primo nodo sbilanciato: caso destra-sinistra

INSERIMENTO

Inseriamo il nodo “25”



Abbiamo ribilanciato l’albero

Stack dei nodi visitati

ALBERI AVL

ALBERI AVL

- Gli alberi AVL sono alberi con profondità $O(\log n)$

ALBERI AVL

- Gli alberi AVL sono alberi con profondità $O(\log n)$
- Le operazioni di ricerca non cambiano rispetto agli alberi binari di ricerca normali

ALBERI AVL

- Gli alberi AVL sono alberi con profondità $O(\log n)$
- Le operazioni di ricerca non cambiano rispetto agli alberi binari di ricerca normali
- Le operazioni di inserimento e rimozione rimangono $O(h)$, con h l'altezza dell'albero, quindi $O(\log n)$

ALBERI AVL

- Gli alberi AVL sono alberi con profondità $O(\log n)$
- Le operazioni di ricerca non cambiano rispetto agli alberi binari di ricerca normali
- Le operazioni di inserimento e rimozione rimangono $O(h)$, con h l'altezza dell'albero, quindi $O(\log n)$
- Richiedono però informazione aggiuntiva salvata nei nodi (come minimo 2 bit/nodo)