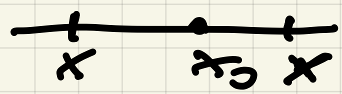
23 Novembre

Giovedì 25 mattina 11-13 Analisi Matematica I

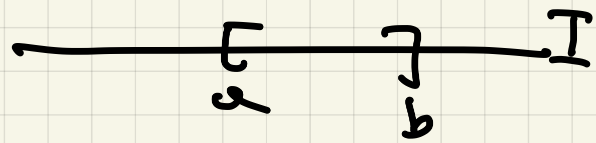
Giovedì 25 pomeriggio 14-16 Geometria

<u>Corollario</u> $f \in C^0(I)$, $x_0 \in I$ allora

posto
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

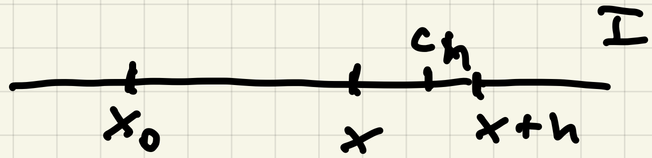


Allora si ha



$$F'(x) = f(x).$$

<u>Dim</u> Sia $x \in I$



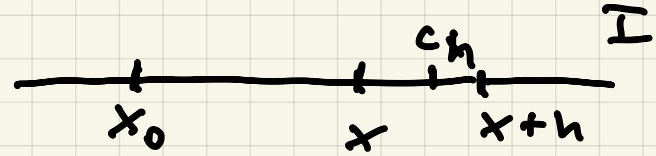
Per fissare le idee sia $x > x_0$, e sia $h > 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \cancel{- \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h) \qquad x \le c_h \le x+h$$

Dim Sia $x \in I$



Per fissare le idee sia $x > x_0$, e sia $h > 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \cancel{- \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} c_h = x$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h) \qquad x \le c_h \le x+h \xrightarrow{h \to 0} x$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) =$$

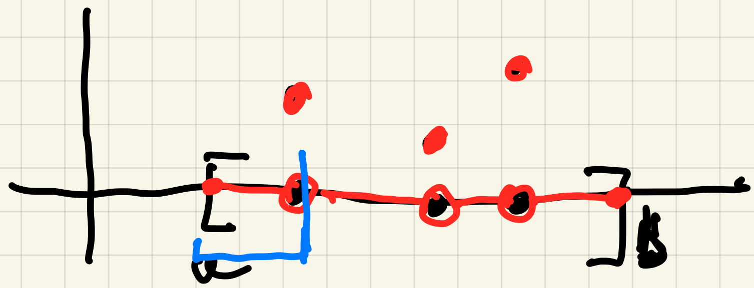
$$= \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

$F'_d(x) = f(x)$. Analogamente $F'_s(x) = f(x)$

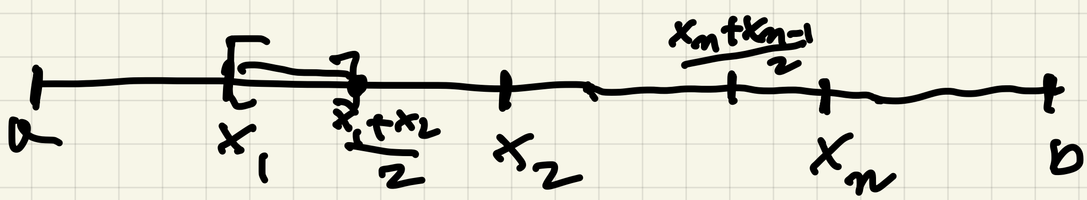
E quindi $F'(x) = f(x)$.

__Esercizio__ Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f uguale a 0 eccetto che in un numero finito di punti. Dimostrare che $\int_a^x f(t)\,dt = 0$ $\forall\ x\in[a,b]$

Ci si chiede se f è integrabile in $[a,b]$



Notare se ad esempio i punti di discontinuità sono $a < x_1 < \dots < x_n < b$, allora in $[a,x_1]$ f è integrabile perché f in $[a,x_1]$ è monotona e quindi è integrabile in $[a, x_1]$

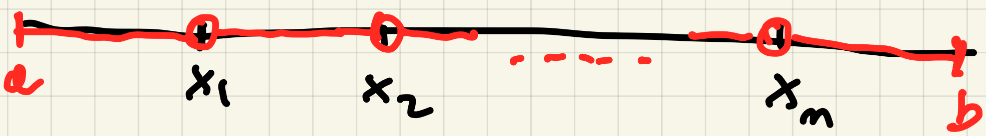


Anche in $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ f è integrabile, come lo è anche in $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ e così via

si conclude che $f\in L[a,b]$

In particolare $\int_a^x f(t)\,dt$ è ben definito per ogni $x\in[a,b]$

f



$\forall\, x \in [a,b]$

$$f(x^-) = \lim_{y \to x^-} f(y) = 0$$

$$f(x^+) = \lim_{y \to x^+} f(y) = 0$$

Per il teor fondamentale del calcolo

posto $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\forall \quad x \in (a,b)$

$$F'_d(x) = f(x^+) = 0$$

$$F'_s(x) = f(x^-) = 0$$

Quindi $\exists \quad F'(x) = 0 \qquad \forall \quad x \in (a,b)$

$F \in C^0([a,b]) \implies F$ e' una funzione costante

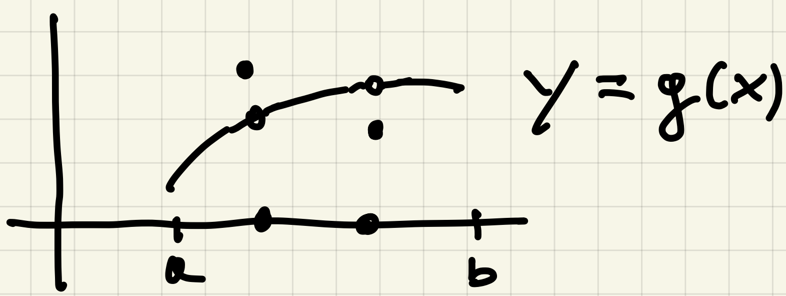
e siccome $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ per definizione,

segue che $F(x) = 0 \quad \forall \ x \in [a,b]$

cioè $\int_a^x f(t)\,dt = 0 \quad \forall\ x \in [a,b]$.

Concludiamo che se $f(x)$ è uguale a 0 in $[a,b]$ eccetto che in un numero finito di punti, allora $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Più in generale, se considero una funzione $g \in L[a,b]$ e se f è una funzione uguale a g dappertutto eccetto che in un numero finito di punti allora $f \in L[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.



Def Data una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, una funzione $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice una primitiva di f se
$$g'(x)=f(x) \quad \forall\ x\in(a,b).$$

Es. Se $f(x)=x$, allora
$g(x)=\frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$.

Def Una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice primitivabile in (a,b) se esiste una sua primitiva in (a,b).

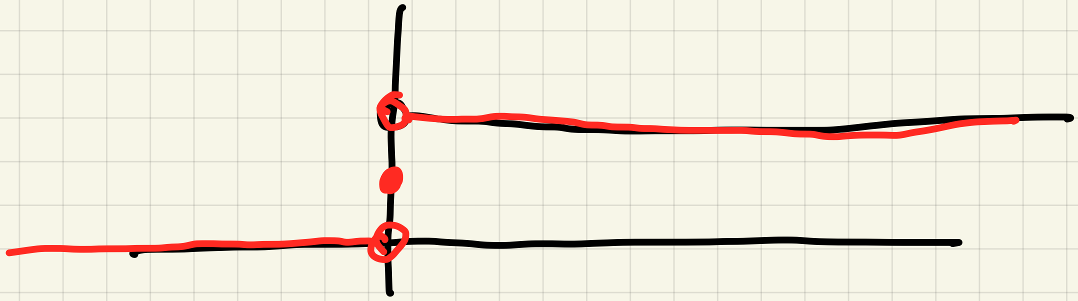
Teor Sia $f\in C^0((a,b))$. Allora f è primitivabile in (a,b).

Dim Se fisso $x_0\in(a,b)$ so, dal teor fondamentale del calcolo, che
$$g(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$
soddisfa $\quad g'(x)=f(x) \quad \forall\ x\in(a,b)$

Quindi f è primitivabile in (a,b).

Es
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

H



$H(x)$ non è primitivabile in $\mathbb{R}$.

Supponiamo per assurdo che sia primitivabile in $\mathbb{R}$, con primitiva $G(x)$. $G'(x) = H(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Poniamo anche $F(x) = \int_0^x H(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Consideriamo $L(x) \doteq G(x) - F(x)$

$L \in C^0(\mathbb{R})$

$$L'(x) = G'(x) - F'(x) \qquad \forall x \neq 0$$
$$= H(x) - H(x) = 0$$

Quindi $L \in C^0(\mathbb{R})$ con $L'(x) = 0$ $\forall x \neq 0$. Per forza deve essere L una funzione costante.

$$F(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

Consideriamo $L(x) \doteq G(x)-F(x)$

$L\in C^0(\mathbb{R})$

$$L'(x) = G'(x)-F'(x) \qquad \forall x\neq 0$$

$$= H(x)-H(x)=0$$

Quindi $L\in C^0(\mathbb{R})$ con $L'(x)=0$ $\forall x\neq 0$. Per forza deve essere L una funzione costante.

In $[0,+\infty)$ $L(x)$ è continua con $L'(x)=0$ per $x>0$ $\Rightarrow$ $L(x)=L(0)$ per $x>0$

Analogamente in $(-\infty,0]$ $L(x)$ è continua con $L'(x)=0$ per $x<0$ $\Rightarrow$ $L(x)=L(0)$ per $x<0$.

$$L(x)\equiv c \qquad \forall x.$$

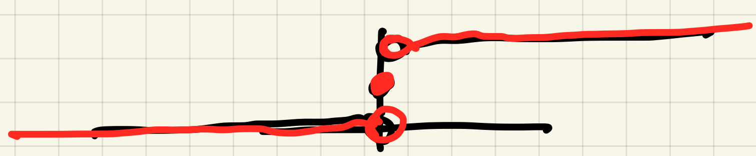
$$\Rightarrow G(x)=F(x)+c \qquad\qquad F(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

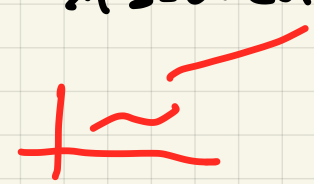
$$G'_d(0)=F'_d(0)=1$$

$\neq$ $\Rightarrow$ non esiste $G'(0)$

$$G'_s(0)=F'_s(0)=0$$

Assurdo.





Teorema di Valutazione Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $G \in C^1([a,b])$ una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$
$$\doteq G\Big]_a^b$$

Esempio 1) $\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{9}{2}$

2) ~~o~~ Ap pure $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$