Rango di una matrice

Def Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Il <u>rango per righe</u> è la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A, cioè

$$rg_r\, A \overset{def}{=} \dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}).$$

Analogamente, il rango per colonne di A è

$$rg_c\, A \overset{def}{=} \dim \operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}).$$

OSS
- $rg_r\, A$ è il <u>massimo numero</u> di righe di A linearmente indipendenti.
- $rg_c\, A$ è il <u>massimo numero</u> di colonne di A linearmente indipendenti.
- $rg_c\, A = rg\, L_A$, $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(X) = AX$. infatti A è la matrice di L_A rispetto alle basi canoniche e le colonne di A generano $\operatorname{im} L_A$.

Teorema Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora $rg_r\, A = rg_c\, A$.

Dim Consideriamo il sistema omogeneo

$$S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

$$\Sigma_S = \ker L_A \Rightarrow rg_c\, A = rg\, L_A = n - \dim \Sigma_S.$$

(teorema delle dim)

Poniamo $r := rg_r\, A$. A meno di riordinare le righe di A possiamo assumere che le prime r righe siano linearmente indipendenti, e quindi sono base per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe. Nel sistema $S : AX = O$ le equazioni dalla $(r+1)$-esima in poi sono combinazioni lineari delle prime r, quindi le possiamo trascurare senza modificare lo spazio delle soluzioni. Sia A' la matrice formata dalle prime r righe di $A \Rightarrow rg_r\, A' = r$.

$S : AX = O_{\mathbb{K}^m}$ è equivalente a $S' : A'X = O_{\mathbb{K}^r}$

$$\Rightarrow rg_c\, A' = rg\, L_{A'} = n - \dim \Sigma_{S'} = n - \dim \Sigma_S = $$
$$= rg_c\, A$$

D'altra parte $L_{A'} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r \Rightarrow rg\, L_{A'} \leq r$

$$\Rightarrow rg_c\, A \leq rg_r\, A \quad \forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Si ha $rg_r\, A = rg_c\, {}^tA \leq rg_r\, {}^tA = rg_c\, A \Rightarrow rg_r\, A = rg_c\, A$.

Dato che i due ranghi sono uguali non ha senso distinguerli e si parla di <u>rango di una matrice</u>, ponendo $\boxed{rg\, A := rg_c\, A = rg_r\, A.}$

Lemma Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è a gradini, allora $\mathrm{rg}\, A$ è uguale al numero di pivot.

Dim Il numero di pivot è uguale al numero di righe non nulle. Mostriamo che queste sono linearmente indipendenti. Siano $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ le righe non nulle con pivot nei posti $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.
$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_k A^{(k)} = 0_{\mathbb{K}^n} \implies \lambda_1 = 0$ da cui successivamente $\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Quindi $\mathrm{rg}\, A = k$.

OSS Le operazioni elementari sulle righe non modificano lo span, e così pure le operazioni elementari sulle colonne. Quindi per calcolare il rg si può usare Gauss per trasformare la matrice in una a gradini.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\, A = 2$.

Teorema di Rouché - Capelli Sia $S: AX = B$ un sistema lineare, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora S è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$. Se questo si verifica, allora $\dim \Sigma_S = n - \operatorname{rg} A$. In particolare, S ha un'unica soluzione $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = n$.

Dim Poniamo $A = (a_{ij})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

S compatibile $\iff \exists\, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $Au = B$

cioè
$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n = b_m \end{cases}$$

$\iff u_1 A_{(1)} + u_2 A_{(2)} + \dots + u_n A_{(n)} = B \iff$
$B \in \operatorname{Span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$.

Supponiamo ora $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi S è compatibile. Per il teorema di struttura, Σ_S è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ con giacitura Σ_{S_0}, dove $S_0: AX = 0_{\mathbb{K}^m}$ è il sistema omogeneo associato. Quindi $\Sigma_{S_0} = \ker L_A$, $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Applicando il teorema della dimensione si ha:
$\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0} = n - \operatorname{rg} L_A = n - \operatorname{rg} A$.

Consideriamo un sistema omogeneo $S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Supponiamo $rg\, A = m \leq n$

$\Rightarrow \dim \Sigma_S = n - m = k$

Se $m = n \Rightarrow S$ ha soltanto la soluzione nulla.

Supponiamo $m < n$.

Se A è a gradini abbiamo m pivot e quindi $k = n - m$ parametri liberi $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$. La soluzione generale è del tipo

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

per certi vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$.

Allora $v_1, \dots, v_k \in \Sigma_S$ dato che v_i si ottiene per $t_i = 1$ e $t_j = 0 \ \forall j \neq i$.

Quindi $\Sigma_S = \text{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow (v_1, \dots, v_k)$ è base per Σ_S, perché $\dim \Sigma_S = k$.

<u>Es</u> $S: \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -5y + 11z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7t \\ y = 11t \\ z = 5t \end{cases}$ $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ base per Σ_S

$S' : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -t + \frac{2}{3}u \\ x_2 = t - \frac{1}{3}u \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}$

$$(t,u) = (1,0) \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(t,u) = (0,1) \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(v_1, v_2) base per $\Sigma_{S'}$.

Teorema Siano U, V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $f: U \to V$ e $g: V \to W$ lineari. Allora $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$.

Dim

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f|"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \operatorname{im} f \arrow[r, "g|"] & W \end{tikzcd}$$

$\operatorname{im}(g \circ f) = g(\operatorname{im} f) \subset \operatorname{im} g \implies \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$
e $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f$.

Corollario Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$.
Allora $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

Dim $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(L_A \circ L_B) \leq \min(\operatorname{rg} L_A, \operatorname{rg} L_B)$

$\implies \operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

Cambio di base

Siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ e
$\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$
due basi per un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V.

$id_V : V \to V$
$id_V(v) = v \quad \forall v \in V$

Mettiamo la base $\mathcal{V}$ nel dominio e $\mathcal{V}'$ nel codominio $\rightsquigarrow$ $G = M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}(id_V)$ è detta <u>matrice del cambiamento di base</u> da $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$.

$$v = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}^{\mathcal{V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{X'}^{\mathcal{V}'} \implies X' = G X$$

G invertibile perché matrice di un isomorfismo.

Quindi G trasforma le coordinate di un vettore di V rispetto alla base $\mathcal{V}$ nelle coordinate dello stesso vettore rispetto alla base $\mathcal{V}'$. Il passaggio inverso è dato dalla matrice G^{-1}, $\quad X = G^{-1} X'$.