Capitolo 7

Teorema della dimensione per applicazioni lineari e sue conseguenze

7.1 Teorema della dimensione

Teorema 7.1.1. *Sia* $f : V \to V'$ *un'applicazione lineare fra* $K-$*spazi vettoriali, supponiamo che* V *abbia dimensione finita. Allora anche* $\operatorname{Im} f$ *ha dimensione finita e si ha*

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f). \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Poichè V ha dimensione finita, chiamiamola n, anche il suo sottospazio $\ker f$ ha dimensione finita, chiamiamola k. Prendiamo dunque una base di $\ker f$: $(u_1, \dots, u_k)$, e completiamola a una base $\mathcal{B}$ di V: $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Consideriamo i vettori di V' $f(u_1), \dots, f(u_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$. Osserviamo che $f(u_1) = \dots = f(u_k) = 0$ in quanto $u_1, \dots, u_k \in \ker f$. Avremo finito se potremo dimostrare che i rimanenti $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ formano una base di $\operatorname{Im} f$.

a) $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

Sia v' un qualunque elemento di $\operatorname{Im} f$: dunque esiste $v \in V$ tale che $v' = f(v)$; v è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ della forma $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$. Allora

$$\begin{aligned} v' = f(v) &= f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) \overset{\text{linearità}}{=} \\ &= \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_k f(u_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \\ &= \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) \end{aligned}$$

poichè nei primi k termini $f(u_1) = \dots = f(u_k) = 0$.

b) $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Se $0 = \mu_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \mu_n f(v_n) \overset{\text{linearità}}{=} f(\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n)$, si ha che $\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n \in \ker f$, e dunque è una combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k$: $\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ per opportuni scalari $\mu_1, \dots, \mu_k$. Allora

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \dots - \mu_n v_n = 0,$$

da cui segue che $\mu_1 = \cdots = \mu_k = \cdots = \mu_n = 0$, in quanto $u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ formano la base $\mathcal{B}$ e sono perciò linearmente indipendenti. In particolare $\mu_{k+1} = \cdots = \mu_n = 0$ $\square$

Definizione 7.1.2. La dimensione di $\operatorname{Im} f$ è detta **rango di** f, e la denoteremo $\operatorname{rg}(f)$.

La seguente utile proposizione estende quanto abbiamo dimostrato nella parte a) del Teorema 7.1.1:

Proposizione 7.1.3. *Sia* $\{v_i\}_{i \in I}$ *un arbitrario sistema di generatori di uno spazio vettoriale* V*, non necessariamente finitamente generato. Sia* $f : V \to V'$ *un'applicazione lineare. Allora* $\operatorname{Im} f$ *è generata dai vettori* $\{f(v_i)\}_{i \in I}$*.*

Dimostrazione. Sia $v' \in \operatorname{Im} f$, allora esiste $v \in V$ tale che $v' = f(v)$; e v può essere scritto come combinazione lineare di una sottofamiglia finita dei vettori $\{v_i\}$: $v = c_1 v_{i_1} + \cdots + c_k v_{i_k}$. Allora $v' = f(c_1 v_{i_1} + \cdots + c_k v_{i_k})$, che, per la linearità di f, è uguale a $c_1 f(v_{i_1}) + \cdots + c_k f(v_{i_k})$, e dunque appartiene al sottospazio generato dai vettori $f(v_i)$, per $i \in I$. Viceversa, sempre per la linearità di f, ogni combinazione lineare di (un numero finito di) vettori $f(v_i)$ appartiene all'immagine di f. $\square$

7.2 Conseguenze del Teorema della dimensione

7.2.1 Applicazioni lineari iniettive e suriettive

Se $f : V \to V'$ è un'applicazione lineare **iniettiva** tra spazi vettoriali di dimensione finita, il suo nucleo $\ker f$ è il sottospazio nullo del dominio. Il Teorema 7.1.1 allora ci dice che $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$; ma $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio di V', quindi $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V'$, e otteniamo che $\dim V \leq \dim V'$.

Se invece f è suriettiva, abbiamo $\dim \operatorname{Im} f = \dim V'$, e quindi dalla (7.1) otteniamo $\dim V - \dim V' = \dim \ker f \geq 0$, e si ha dunque $\dim V \geq \dim V'$.

La prossima Proposizione analizza il caso in cui V e V' hanno la stessa dimensione.

Proposizione 7.2.1. *Sia* $f : V \to V'$ *un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali della stessa dimensione finita:* $\dim V = \dim V'$*. Allora* f *è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Infatti: per il Teorema 6.4.3 f è iniettiva se e solo $\ker f = (0)$ se e solo $\dim \ker f = 0$. Ma per il Teorema 7.1.1 si ha la relazione $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$. Quindi f è iniettiva se e solo se $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f)$. D'altra parte f è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = V'$ se e solo se $\dim \operatorname{Im} f = \dim V' \overset{\text{per ipotesi}}{=} \dim V$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Se f è un'applicazione lineare iniettiva, allora $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$; possiamo restringere il codominio di f e considerare f come un'applicazione da V a $\operatorname{Im} f$. Ora la nuova applicazione $f : V \to \operatorname{Im} f$ verifica le ipotesi della Proposizione 7.2.1, quindi è un isomorfismo. In particolare V è isomorfo a $\operatorname{Im} f$: $V \simeq \operatorname{Im} f$.

7.2.2 Dimensione di V/W

Sia ora $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di uno spazio di dimensione finita V. Consideriamo lo spazio vettoriale quoziente V/W. Definiamo un'applicazione $\pi : V \to V/W$ ponendo $\pi(v) = [v] = v + W$; chiaramente π è suriettiva.

Verifichiamo che π è lineare: $\pi(\lambda v + \mu w) = [\lambda v + \mu w] = \lambda[v] + \mu[w] = \lambda\pi(v) + \mu\pi(w)$: abbiamo usato il fatto che le operazioni in V/W sono indotte dalle operazioni in V. L'applicazione π è detta **epimorfismo canonico**.

Osserviamo che $\ker \pi = \{v \in V \mid \pi(v) = [v] = 0 \text{ in } V/W\}$. Ma lo zero di V/W è $[0_V]$, quindi $v \in \ker \pi$ se e solo se v è equivalente a 0_V, cioè $v \in W$. Quindi $\ker \pi = W$. Quindi il Teorema della dimensione ci dà: $\dim V = \dim W + \dim \operatorname{Im} \pi$; ma π è suriettiva, dunque $\dim \operatorname{Im} \pi = \dim V/W$. Possiamo dunque concludere che $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

7.2.3 Rango per righe e rango per colonne coincidono

Sia $A \in M(m \times n, K)$. Consideriamo l'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$ introdotta nella Sezione 6.3. Il Teorema della dimensione ci dà:

$$\dim K^n = n = \dim \ker L(A) + \dim \operatorname{Im} L(A). \tag{7.2}$$

Analizziamo $\ker L(A)$ e $\operatorname{Im} L(A)$.

$$\ker L(A) = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \mid Ax = 0\} =: W;$$

W è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente A come matrice dei coefficienti.

D'altra parte, per la Proposizione 7.1.3, $\operatorname{Im} L(A)$ è il sottospazio di K^m generato dalle immagini in $L(A)$ dei vettori della base canonica $\mathcal{C}$ di K^n, che per l'Osservazione 10 sono le colonne di A:

$$\begin{aligned} &L(A)(e_1) = a^1, \quad \text{la prima colonna di} A \\ &\vdots \\ &L(A)(e_n) = a^n, \quad \text{l'ultima colonna di } A \end{aligned}$$

Dunque $\operatorname{Im} L(A) =< a^1, \dots, a^n >$ è lo spazio delle colonne della matrice A.

Quindi il Teorema della dimensione, e in particolare la relazione (7.2), ci dice che

$$n = \dim W + \text{ rango per colonne di } A.$$

D'altra parte abbiamo visto nel Teorema 5.6.2 che $\dim W = n -$ rango per righe di A.

La discussione precedente ci permette di concludere che i due ranghi sono uguali, enunciando il seguente Teorema.

Teorema 7.2.2. *Sia $A \in M(m \times n, K)$ una matrice. Il rango per righe di A coincide con il rango per colonne di A, ossia lo spazio delle righe e le spazio per colonne di A hanno la stessa dimensione.*

Quindi d'ora in poi parleremo semplicemente di **rango di una matrice** A, e lo denoteremo con il simbolo $\operatorname{rg} A$.

7.2.4 Sistemi lineari di equazioni II

Sia $Ax = 0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite scritto in forma matriciale, dove $A \in M(m \times n, K)$. Come già osservato, lo spazio W delle soluzioni di tale sistema non è altro che il nucleo $\ker L(A)$ dell'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$ associata alla matrice dei coefficienti A del sistema. Il Teorema della dimensione 7.1.1 dunque ci permette di ritrovare la prima parte del Teorema 5.6.2, che afferma che $\dim W = n - r$, dove r è il rango di A, ossia la dimensione dell'immagine di $L(A)$.

Se abbiamo invece un sistema lineare non omogeneo $Ax = b$, con $b \in K^m$, osserviamo che è compatibile precisamente quando $b \in \operatorname{Im} L(A)$. In tal caso l'insieme delle sue soluzioni è $L(A)^{-1}(b)$. Se z è una soluzione particolare, $Az = b$, come visto nel Capitolo 5.5.1 ogni altra soluzione è del tipo $z + u$ con $u \in W$; dunque lo spazio affine delle soluzioni $L(A)^{-1}(b)$ può esser interpretato come un elemento dello spazio vettoriale quoziente $K^n/\ker L(A)$.

Capitolo 8

Teorema di determinazione di un'applicazione lineare e sue conseguenze

8.1 Teorema di determinazione di un'applicazione lineare

Teorema 8.1.1. *Siano V, W due $K-$spazi vettoriali, supponiamo che V abbia dimensione finita n. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_n$ vettori di W del tutto arbitrari. Allora esiste una ed una sola applicazione* **lineare** *$f : V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.*

Vedremo che l'ipotesi che V abbia dimensione finita potrà essere rimossa; facciamo questa ipotesi solo per semplificare l'esposizione.

Si tratta di un teorema di esistenza e unicità: come si fa spesso per dimostrare teoremi di questo tipo, la strategia consiste nel dimostrare dapprima l'unicità, supponendo che una tale applicazione lineare esista; questo consente di capire come l'applicazione cercata deve operare. Poi la dimostrazione dell'esistenza si riduce a verificare che l'applicazione trovata verifica le condizioni richieste, ossia in questo caso che è lineare e manda i vettori v_i ordinatamente nei vettori w_i.

Dimostrazione. **Unicità**: supponiamo che f esista e vediamo come opera sui vettori di V. Sia dunque $v \in V$, allora c'è una e una sola espressione di v come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e sono univocamente determinate da v. Allora

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \overset{\text{linearità}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n. \quad (8.1)$$

Dunque $f(v)$ è completamente determinato e questo prova l'unicità.

Esistenza: prendiamo la (8.1) come definizione di f, ossia definiamo $f(v)$ come $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$. Così f è ben definita; dobbiamo dimostrare che è lineare e che $f(v_i) = w_i$ per ogni indice $i = 1, \dots, n$.

Siano dunque v, v' due vettori di V, allora $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, e $v + v' = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$; quindi le coordinate di $v + v'$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n$. Perciò, per definizione di f, $f(v) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$, $f(v') = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n$, $f(v + v') = (\lambda_1 + \mu_1)w_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)w_n$; ma questo è uguale a $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n = f(v) + f(v')$, il che prova l'additività di f. Analogamente proviamo l'omogeneità di f: se $c \in K$, $cv = c(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = (c\lambda_1)v_1 + \cdots + (c\lambda_n)v_n$, quindi le coordinate di cv rispetto a $\mathcal{B}$ sono $c\lambda_1, \ldots, c\lambda_n$ e $f(cv) = (c\lambda_1)w_1 + \cdots + (c\lambda_n)w_n = c(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n) = cf(v)$. Quindi f è lineare.

Infine osserviamo che per ogni i $v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$, ossia le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; quindi per definizione di f si ha $f(v_i) = 0w_1 + \cdots + 1w_i + \cdots + 0w_n = w_i$. Questo conclude la dimostrazione dell'esistenza.

□

Osservazione 11. Il Teorema 8.1.1 di determinazione di un'applicazione lineare vale anche se la dimensione di V non è finita. Precisamente, se $\{v_i\}_{i \in I}$ è una base di V, e $\{w_i\}_{i \in I}$ sono una famiglia di vettori di W indiciati sullo stesso insieme d'indici I, esiste una e una sola applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni indice $i \in I$. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente. Consiglio di scriverla dettagliatamente per esercizio.

8.2 Spazi vettoriali della stessa dimensione

Iniziamo questa sezione con una semplice proposizione.

Proposizione 8.2.1. *Ogni composizione di applicazioni lineari è lineare. Precisamente: siano $f : V \to W$, $g : W \to U$ due applicazione lineari di K spazi vettoriali. Allora $g \circ f : V \to U$ è lineare.*

Dimostrazione. $(g \circ f)(\lambda v + \mu v') = g(f(\lambda v + \mu v')) \overset{\text{linearità di } f}{=} g(\lambda f(v) + \mu f(v')) \overset{\text{linearità di } g}{=} \lambda g(f(v)) + \mu g(f(v')) = \lambda(g \circ f)(v) + \mu(g \circ f)(v')$. □

Supponiamo ora che V, W siano K-spazi vettoriali della **stessa dimensione finita** n. Siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ basi rispettivamente di V e di W. Allora, per il Teorema 8.1.1, esiste una e una sola $f : V \to W$ lineare ed esiste una e una sola $g : W \to V$ lineare, tali che $f(v_i) = w_i$ e $g(w_i) = v_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Possiamo allora considerare le applicazioni lineari composte: $g \circ f : V \to V$ e $f \circ g : W \to W$. Osserviamo che per ogni i

$$(g \circ f)(v_i) \overset{\text{definizione di } f}{=} g(w_i) \overset{\text{definizione di } g}{=} v_i;$$

allora, detta id_V l'applicazione identica di V, si ha $(g \circ f)(v_i) = \mathrm{id}_V(v_i)$ per ogni vettore v_i della base $\mathcal{B}$. Per la parte "unicità" del Teorema 8.1.1, visto che $g \circ f$ e id_V sono applicazioni lineari che operano allo stesso modo sui vettori di una base del dominio, possiamo concludere che $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Nello stesso modo si ottiene che $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Abbiamo perciò ottenuto che f e g sono applicazioni lineari una inversa dell'altra, e dunque sono isomorfismi.

Da ciò si deduce il seguente importante fatto.

Teorema 8.2.2. *Se V, W sono K-spazi vettoriali con $\dim V = \dim W = n$, allora V e W sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per costruire un isomorfismo di V in W basta fissare due basi, una in V e l'altra in W, e procedere come sopra. $\square$

In particolare:

Corollario 8.2.3. *Ogni K-spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a K^n.*

Gli isomorfi che abbiamo costruito sono tutti **non canonici** in quanto dipendono dalla scelta di basi nel dominio e nel codominio.

Sia $\dim V = n$ e fissiamo una sua base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Consideriamo in K^n la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Denoteremo $\kappa_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ l'unico isomorfismo tale che $\kappa_B(v_i) = e_i$ per ogni i. Come opera $\kappa_{\mathcal{B}}$ su un generico vettore $v \in V$? Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $a_1, \ldots, a_n$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$. Allora per definizione di $\kappa_{\mathcal{B}}$ si ha: $\kappa_B(v) = \kappa_{\mathcal{B}}(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = (a_1, \ldots, a_n)$: $\kappa_{\mathcal{B}}$ **associa a v la n-upla delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.** L'isomorfismo inverso $\kappa_{\mathcal{B}}^{-1} : K^n \to V$ associa invece a una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ il vettore $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, la combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ con coefficienti $a_1, \ldots, a_n$.

Esercizi 6. Siano V, W due $K-$spazi vettoriali, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V, $w_1, \ldots, w_n$ vettori di W, $f : V \to W$ l'unica applicazione lineare tale che $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$ come dimostrato nel Teorema 8.1.1. Allora:

- f è suriettiva se e solo se $w_1, \ldots, w_n$ sono un sistema di generatori di W;
- f è iniettiva se e solo se $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione per esercizio.

8.3 Esempi

1. $\mathbb{C}$-endomorfismi di $\mathbb{C}$.

Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi. Abbiamo osservato che $\mathbb{C}$ può essere pensato sia come $\mathbb{C}-$ sia come $\mathbb{R}-$ spazio vettoriale. Nel primo caso la sua dimensione è 1, nel secondo è 2, infatti nell'Esempio 3.1.5, 4. abbiamo osservato che $(1, i)$ è una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Dunque, su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Nell'isomorfismo $\kappa_B : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ associato a questa base il numero complesso $a + bi$ corrisponde alla coppia (a, b). In altre parole questo isomorfismo permette di "identificare" $\mathbb{C}$ con i punti del piano reale, detto in questo caso "piano di Argand–Gauss".

A un numero complesso $z = a + bi$ possiamo associare il suo modulo $\rho =\mid z \mid= \sqrt{a^2 + b^2}$, che è un numero reale ≥ 0. Se $\mid z \mid= 1$, si ha $a^2 + b^2 = 1$, e quindi si può scrivere

$$\begin{cases} a = & \cos\theta \\ b = & \sin\theta \end{cases}$$

dove θ è determinato a meno di multipli interi di 2π. Quindi $z = \cos\theta + \sin\theta i$. Il punto corrispondente a z in $\mathbb{R}^2$ sta sulla circonferenza unitaria. Se $z \neq 0$ è un qualunque numero complesso, lo si può scrivere $z = \rho(z/\rho) = \rho z'$ dove z' ha modulo 1. E quindi $z = \rho(\cos\theta + \sin\theta i)$: questa è la cosiddetta notazione trigonometrica dei numeri complessi.

Vogliamo ora dare un'interpretazione geometrica ai $\mathbb{C}$-endomorfismi di $\mathbb{C}$, cioè alle applicazioni $\mathbb{C}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. In maniera analoga a quanto visto nell'Esempio 6.2.3 1., un tale endomorfismo è del tipo $\cdot z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la moltiplicazione per un numero complesso z. Supponiamo che $| z |= 1$ e scriviamo $z = \cos\theta + \sin\theta i$. Si ha:

$$\cdot z : a + bi \to (\cos\theta + \sin\theta i)(a + bi) = (a\cos\theta - b\sin\theta) + (a\sin\theta + b\cos\theta)i.$$

Identifichiamo ora $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$:

$$\cdot z : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dunque $\cdot z = L(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: oltre a essere $\mathbb{C}$-lineare è anche $\mathbb{R}$-lineare. Se scriviamo anche $a + bi$ in forma trigonometrica, come $\rho(\cos\alpha + \sin\alpha i)$, otteniamo che

$$L(A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}.$$

Concludiamo dunque che $\cdot z = L(A)$ è la rotazione di angolo θ.

2. **Lo spazio vettoriale duale.**

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Consideriamo lo spazio vettoriale duale $V^* = \{f : V \to K \mid f \text{ lineare}\}$ i cui elementi sono le **forme lineari** su V. Per ogni $i = 1, \dots, n$ definiamo la forma lineare $v_i^* : V \to K$ ponendo $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, il simbolo di Kronecker, ossia

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Per il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare 8.1.1, v_i^* lineare risulta ben definita. Se $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, si ha $v_i^*(v) = x_1\delta_{i1} + \cdots + x_n\delta_{ni} = x_i$: è la i-esima coordinata di v rispetto a $\mathcal{B}$. Per questo motivo le funzioni $v_1^*, \dots, v_n^*$ sono dette **funzioni coordinate rispetto alla base** $\mathcal{B}$.

Teorema 8.3.1 (Base duale)**.** *Le forme lineari $v_1^*, \dots, v_n^*$ formano una base di V^*, detta* **base duale di** $\mathcal{B}$ *e denotata $\mathcal{B}^*$.*

Dimostrazione. Proviamo che $v_1^*, \dots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo che $\lambda_1v_1^* + \cdots + \lambda_nv_n^* = 0$: ciò significa che per ogni $v \in V$ si ha $(\lambda_1v_1^* + \cdots + \lambda_nv_n^*)(v) = 0$. Questo vale in particolare per ogni vettore di $\mathcal{B}$, dunque per ogni i si ha

$$0 = (\lambda_1v_1^* + \cdots + \lambda_nv_n^*)(v_i) = \text{usando la definizione delle operazioni in } V^*$$

$$= \lambda_1v_1^*(v_i) + \cdots + \lambda_nv_n^*(v_i) = \lambda_1\delta_{1i} + \cdots + \lambda_n\delta_{ni} = \lambda_i.$$

Quindi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Proviamo ora che $v_1^*, \dots, v_n^*$ generano V^*. Sia $f : V \to K$ una forma lineare; il nostro scopo è trovare degli scalari $c_1, \dots, c_n$ tali che $f = c_1v_1^* + \cdots + c_nv_n^*$. Cerchiamo di capire quali possono essere. Se esistono scalari per cui una tale uguaglianza vale, le due applicazioni

f e $c_1v_1^* + \cdots + c_nv_n^*$ devono coincidere su ogni vettore di V, e in particolare sui vettori di $\mathcal{B}$, cioè dev'essere $f(v_1) = (c_1v_1^* + \cdots + c_nv_n^*)(v_1) = c_1, \ldots, f(v_n) = (c_1v_1^* + \cdots + c_nv_n^*)(v_n) = c_n$. Quindi l'unica possibilità è che $c_1 = f(v_1), \ldots, c_n = f(v_n)$, ossia che $f = f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*$. E in effetti questa uguaglianza di forme lineari è vera per il Teorema 8.1.1, poichè, per ogni i, $f(v_i) = (f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*)(v_i)$: assumono lo stesso valore sui vettori di $\mathcal{B}$. $\square$

Osservazione 12. Abbiamo dunque dimostrato che $f = f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*$. Osserviamo che vale anche un'uguaglianza "duale": per ogni vettore $v \in V$ si ha $v = v_1^*(v)v_1 + \cdots + v_n^*(v)v_n$. In altre parole, data la base $\mathcal{B}$ di V e la base duale $\mathcal{B}^*$ di V^*, le coordinate di f rispetto a $\mathcal{B}^*$ sono $f(v_1), \ldots, f(v_n)$, i valori assunti da f sui vettori di $\mathcal{B}$, mentre le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $v_1^*(v), \ldots v_n^*(v)$, i valori assunti su v dai "vettori" di $\mathcal{B}^*$.

Capitolo 9

Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate

9.1 Associare a un'applicazione lineare una matrice

Nella Sezione 6.3 abbiamo visto come ad ogni matrice $A \in M(m \times n, K)$ si può associare in maniera naturale un'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$. Ora vogliamo associare una matrice a entrate in K ad ogni applicazione lineare fra K-spazi vettoriali di dimensione finita. Per farlo dobbiamo preliminarmente fissare delle basi del dominio e del codominio, in modo da lavorare "in coordinate."

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra gli spazi vettoriali V, W di dimensioni rispettivamente n e m. Fissiamo basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ di W. Consideriamo gli n vettori corrispondenti in f ai vettori di $\mathcal{B}$: $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$; ognuno si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, nella forma

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned} \tag{9.1}$$

cioè $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Definizione 9.1.1. La **matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$** è la seguente matrice $m \times n$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & \dots & f(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nelle colonne si trovano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$.

Allora se $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in V$, per la linearità di f si ha

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1f(v_1) + \cdots + x_nf(v_n) = \\ &= x_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m. \end{aligned}$$

Perciò, se chiamiamo $y_1, \dots, y_m$ le coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, ossia se $f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m$, abbiamo

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

In forma compatta possiamo scrivere $Y = AX$, dove $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Si può riassumere la situazione scrivendo un "diagramma commutativo"

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \end{tikzcd} \quad \text{dove} \quad \begin{tikzcd} v \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & f(v) \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "L(A)"] & (y_1, \dots, y_m) \end{tikzcd} \tag{9.2}$$

Diagramma commutativo significa che $\kappa_{\mathcal{B}'} \circ f = L(A) \circ \kappa_{\mathcal{B}}$: posso passare da V a K^m applicando prima f poi $\kappa_{\mathcal{B}'}$, oppure applicando prima $\kappa_{\mathcal{B}}$ poi $L(A)$, e il risultato è lo stesso.

Quando si introducono delle basi, si può lavorare con le coordinate anzichè con i vettori astratti, e ci si riduce a una situazione analoga a quella che si ha negli spazi vettoriali numerici K^n. **In coordinate** ogni applicazione lineare f si rappresenta mediante una matrice A, come l'applicazione $L(A)$.

9.2 Esempi

1. La matrice associata all'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$ rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio è proprio A. Infatti $L(A)(e_i) = a^i$, la colonna i-esima di A. Se si cambiano basi, cambia la matrice.

2. Consideriamo la seguente matrice 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, e l'applicazione lineare $L(A) : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$. Consideriamo poi le seguenti basi di $\mathbb{Q}^2$ (perchè sono basi?): $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}' = (w_1, w_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$. Vogliamo determinare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(L(A))$.

Dobbiamo calcolare $L(A)(v_1), L(A)(v_2)$ e poi esprimerli in funzione della base $\mathcal{B}'$.

$$L(A)(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ L(A)(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -w_1 + 2w_2; \ \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7w_1 + \frac{5}{2} w_2.$$

Perciò $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(L(A)) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Vedremo in seguito (Teorema 10.3.1) un altro modo per trovare questa matrice.

3. L'applicazione $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ tale che $D(f(t)) = f'(t)$, la derivata del polinomio f, è lineare (perchè?). Osserviamo che non ha senso parlare di matrice di D perchè $\mathbb{R}[t]$ ha dimensione infinita. Per farlo, ci possiamo restringere a suoi sottospazi di dimensione finita. Consideriamo dunque gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali di dimensione finita $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ con base $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ con base $\mathcal{B}' = (1, t, t^2, t^3)$. Definiamo un'applicazione $T : V \to W$ ponendo $T(f(t)) = t^2 f'(t+1)$. Verificare per esercizio che anche T è lineare. Calcoliamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$:

$$T(1) = 0, \ T(t) = t^2, \ T(t^2) = 2t^2 + 2t^3, \ \text{perciò} \ \ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, le coordinate di $T(f)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix};$$

quindi $T(f(t)) = (a_1 + 2a_2)t^2 + 2a_2 t^3$. Questo può essere verificato anche direttamente, usando le proprietà della derivata.

9.3 Forma canonica

Il prossimo teorema ci dice che, purchè le basi del dominio e del codominio siano scelte in maniera opportuna, la matrice di un'applicazione lineare può assumere una forma particolarmente semplice, detta "forma canonica".

Teorema 9.3.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra K-spazi vettoriali di dimensioni finite m, n, sia $r = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$ il rango di f. Esistono basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di W tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è una matrice a blocchi della forma*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} r & & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} & \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{9.3}$$

dove E_r è la matrice identica $r \times r$, e gli zeri denotano delle matrici nulle rispettivamente di tipo $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$, $(m-r) \times (n-r)$.

Dimostrazione. Cerchiamo di capire quali proprietà devono avere le due basi perchè la matrice di f rispetto a tali basi abbia la forma voluta.

Se la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ ha la forma (9.3) rispetto a basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ significa che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 &&= 1w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_m \\ &\vdots \\ f(v_r) &= w_r &&= 0w_1 + \cdots + 1w_r + \cdots + 0w_m \\ f(v_{r+1}) &= 0 \\ &\vdots \\ f(v_n) &= 0, \end{aligned}$$

perciò $v_{r+1}, \dots, v_n \in \ker f$, e sono linearmente indipendenti perchè fanno parte della base $\mathcal{B}$ di V. Siccome $r = \operatorname{rg} f$ e $\dim V = n$, per il Teorema della dimensione 7.1.1 $\dim \ker f = n - r$, quindi $v_{r+1}, \dots, v_n$ **formano una base di** $\ker f$. D'altra parte **i vettori** $w_1, \dots, w_r$ **generano** $\operatorname{Im} f$, perchè sono le immagini non nulle dei vettori di una base del dominio (Proposizione 7.1.3) e quindi ne formano una base, perchè sono in numero di r. Ora abbiamo gli elementi necessari per costruire le basi volute.

Partiamo da una base di $\ker f$: $v_{r+1}, \dots, v_n$, e la completiamo a una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V. Allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im} f$. Siccome $f(v_{r+1}) = \cdots = f(v_n) = 0$, non contribuiscono a generare $\operatorname{Im} f$, allora gli r vettori $f(v_1), \dots, f(v_r)$ sono un sistema di r generatori, e quindi una base di $\operatorname{Im} f$. Pongo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$, e poi li completo a una base $\mathcal{B}'$ di W aggiungendo opportuni vettori $w_{r+1}, \dots, w_m$. Rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice di f ha la forma (9.3). □

9.4 Rango di matrici e applicazioni lineari

Teorema 9.4.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita, siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V e di W rispettivamente. Sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$. Allora* $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} L(A)$.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma commutativo dove $\kappa_{\mathcal{B}}$ e $\kappa_{\mathcal{B}'}$ sono gli isomorfismi introdotti nella Sezione 8.2:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}'}} \\ K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^m \end{array} .$$

Osserviamo che $\operatorname{Im} L(A) = \kappa_{B'}(\operatorname{Im} f)$; infatti se $y \in \operatorname{Im} L(A)$ esiste $x \in K^n$ tale che $y = L(A)(x)$. Essendo $\kappa_{\mathcal{B}}$ un isomorfismo, $x = \kappa_{\mathcal{B}}(v)$ per un (unico) $v \in V$. Quindi $y = L(A)(\kappa_{\mathcal{B}}(v)) = \kappa_{\mathcal{B}'}(f(v))$ per la commutatività del diagramma, e quindi $\operatorname{Im} L(A) \subset \kappa_{B'}(\operatorname{Im} f)$. Viceversa se $y \in \kappa_{B'}(\operatorname{Im} f)$, esiste $v \in V$ tale che $y = \kappa_{B'}(f(v)) = L(A)(\kappa_{\mathcal{B}}(v))$, il che prova l'inclusione opposta. Poichè $\kappa_{\mathcal{B}'}$ è un isomorfismo, $\operatorname{Im} f \simeq \kappa_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} L(A)$

e perciò $\dim \operatorname{Im} L(A) = \dim \operatorname{Im} f$ ossia $\operatorname{rg} L(A) = \operatorname{rg} f$; infine ricordiamo che $\operatorname{rg} L(A) = \operatorname{rg} A$ (Sezione 7.2.3). □

Otteniamo la seguente conseguenza:

Corollario 9.4.2. *Matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse hanno lo stesso rango.*

9.5 Isomorfismo fra applicazioni lineari e matrici

Fissiamo ora due K-spazi vettoriali V, W di dimensioni finite n, m e due loro basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$. Associando a ogni applicazione lineare di V in W la sua matrice rispetto a tali basi possiamo costruire un'applicazione.

Teorema 9.5.1. *L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}: & \operatorname{Hom}(V, W) & \to & M(m \times n, K) \\ & f & \to & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

è un isomorfismo di K-spazi vettoriali.

La dimostrazione si basa sul teorema di determinazione di un'applicazione lineare.

Dimostrazione.

1. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è lineare: date applicazioni lineari $f, g : V \to W$ e scalari λ, μ si tratta di verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) + \mu M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(g)$. Per la Definizione 9.1.1 di matrice di un'applicazione lineare, basta verificare che $(\lambda f + \mu g)(v_i) = \lambda f(v_i) + \mu g(v_i)$ per ogni indice $i = 1, \dots, n$; ma questo segue dalla definizione delle operazioni in $\operatorname{Hom}(V, W)$.

2. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è iniettiva: siccome abbiamo appena verificato che l'applicazione è lineare, basta verificare che $\ker M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è nullo. Sia dunque $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = 0$, la matrice nulla. Allora le sue colonne sono tutte uguali al vettore nullo di K^m, e quindi $f(v_1) = \cdots = f(v_n) = 0_W$. Ma anche l'applicazione nulla fa corrispondere a ogni vettore di $\mathcal{B}$ il vettore 0_W; per la parte di unicità del teorema 8.1.1, segue che $f = 0$.

3. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è suriettiva: prendiamo una qualunque matrice $A \in M(m \times n, K)$; vogliamo costruire un'applicazione lineare f tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = A$. Consideriamo le n colonne di A: $a^1, \dots, a^n$, e gli n vettori di W che hanno come coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ tali colonne: $u_1 := \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1}(a^1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m, \dots, u_n := \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1}(a^n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$. Definiamo allora f come l'unica applicazione lineare di V in W tale che $f(v_1) = u_1, \dots, f(v_n) = u_n$. Si ha allora $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$.

□

Corollario 9.5.2. $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim M(m \times n, K) = mn = \dim V \dim W$.

Si ritrova in particolare che $\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V, K) = \dim V$ (Sezione 8.3, 2.)

9.6 Matrice di una composta di applicazioni lineari

Consideriamo la seguente situazione:

$$\begin{array}{ccccccl} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U & & \text{applicazioni lineari} \\ m & & n & & p & & \text{dimensioni finite} \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}' & & \mathcal{B}'' & & \text{basi} \end{array}$$

Allora la matrice dell'applicazione lineare composta è il prodotto righe per colonne delle matrici di f e di g nell'ordine appropriato:

$$\underset{p\times m}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(g\circ f)} = \underset{p\times n}{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g)}\ \underset{n\times m}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)} \quad \text{prodotto righe per colonne}$$

Facciamo la verifica. Siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_m)$, $\mathcal{B}'' = (v''_1, \ldots, v''_p)$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g)$.

Per ogni $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ si ha:

$$f(v_k) = a_{1k}v'_1 + \cdots + a_{mk}v'_m = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}v'_j,$$

$$g(v'_j) = b_{1j}v''_1 + \cdots + b_{pj}v''_p = \sum_{i=1}^{p} b_{ij}v''_i.$$

Allora

$$\begin{aligned} g(f(v_k)) &= g(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}v'_j) \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{jk}g(v'_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{p} b_{ij}v''_i \overset{\text{prop.distrib.}}{=} \sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{jk})v''_i : \end{aligned}$$

il coefficiente di v''_i è proprio l'elemento di BA di posto ik.

Il caso degli endomorfismi

Se $f : V \to V$ è un endomorfismo di V, $\dim V = n$, si può prendere la stessa base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio; in tal caso si scrive $M_{\mathcal{B}}(f)$ anzichè $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

L'isomorfismo $M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V, V) \to M(n \times n, K)$ gode allora della ulteriore proprietà $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f)$, cioè conserva, oltre alla somma e al prodotto esterno, anche l'ulteriore operazione di "prodotto" interno, più precisamente manda la composizione di applicazioni in $\mathrm{Hom}(V, V)$ nel prodotto righe per colonne delle loro matrici in $M(n\times n, K)$. In questo caso si dice che $M_{\mathcal{B}}$ è un **isomorfismo di K-algebre**.

9.7 Applicazioni lineari di K^n in K^m

Come ulteriore applicazione della teoria sviluppata, concludiamo questo capitolo dando la caratterizzazione delle applicazioni lineari $K^n \to K^m$: sono tutte e sole del tipo $L(A)$.

Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ le basi canoniche di K^n e di K^m rispettivamente. Abbiamo allora l'isomorfismo

$$\begin{array}{rlll} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}: & \mathrm{Hom}(K^n, K^m) & \to & M(m \times n, K) \\ & f & \to & M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(f) \\ & L(A) & \to & A \end{array} \qquad \text{Sezione 9.2, 1.}$$

L'isomorfismo inverso è allora $L : M(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ che manda $A \to L(A)$. Ciò significa che **ogni applicazione lineare $K^n \to K^m$ può essere espressa nella forma $L(A)$ per un'unica matrice A.**

Nel caso particolare $m = n$, supponiamo che $f : K^n \to K^n$ corrisponda nell'isomorfismo $M_{\mathcal{C}}$ a una matrice $A = M_{\mathcal{C}}(f)$ e $g : K^n \to K^n$ a una matrice $B = M_{\mathcal{C}}(g)$, dunque $f = L(A)$, $g = L(B)$. Allora $g \circ f$ corrisponde a $M_{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}(f)M_{\mathcal{C}}(g) = BA$. Quindi si ha $L(BA) = L(B) \circ L(A)$.