ASPETTI TOPOLOGICI in QFT

Siamo interessati a QFT (in $d=1$) con

UNO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI non-triviale.

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow N$$

sp. delle config. (es. $\varphi = x^i$ descrivono coord della particella, e parametrizzano quindi lo sp. delle config.)

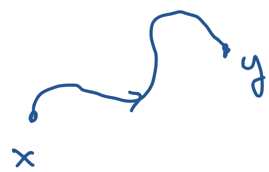
In particolare vogliamo

$$\pi^1(N) \neq 0$$

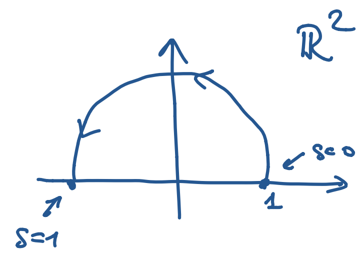
Vedremo che gli ISTANTONI giocano un ruolo anche in questo contesto.

Topologia & Omotopia

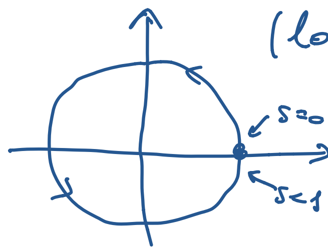
Def. CAMMINO. Sia N uno sp. topologico e siano $x, y \in N$.
Allora un CAMMINO in N da x a y è
una FUNZIONE CONTINUA $\alpha : I \to N$ dove $I = [0,1]$
t.c. $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.



Es. $\alpha : \underset{s \in}{I} \to \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha(s) = (\cos \pi s \,,\, \sin \pi s)$

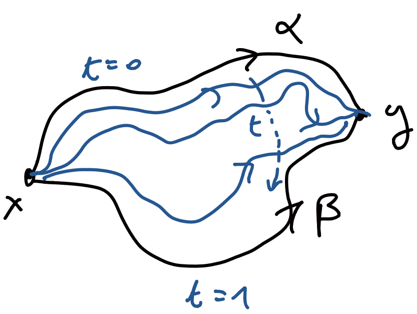


Es. $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ (loop)



Def. OMOTOPIA di cammini. Sia $\alpha : I \to N$ $\beta : I \to N$ due
cammini da $x \in N$ a $y \in N$.
α e β si dicono OMOTOPI se $\exists$ una funz. CONTINUA
$H : I \times I \to N$ t.c.

$$H(s,0) = \alpha(s) \qquad H(0,t) = x$$
$$H(s,1) = \beta(s) \qquad H(1,t) = y$$



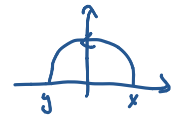
Siccome posso def. un cammino
$\forall t \quad \alpha_t(s) \equiv H(s,t)$

α_t mi dà una famiglia
a un parametro (t) di
cammini

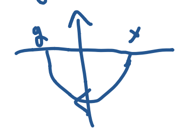
H è chiamata OMOTOPIA da α a β.

Scriviamo $\alpha \sim \beta$ se α e β sono omotopi.

Es. $\alpha : I \to D^2$ $\quad \alpha(s) = (\cos \pi s, \ \mathrm{sen}\, \pi s)$

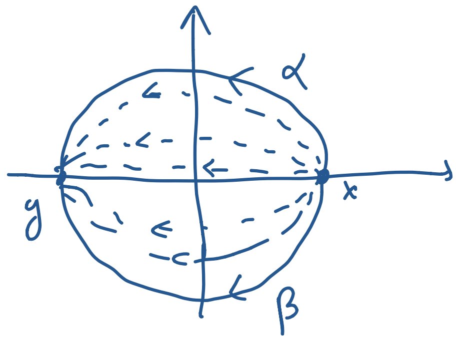


$\beta : I \to D^2$ $\quad \beta(s) = (\cos \pi s, \ -\mathrm{sen}\, \pi s)$

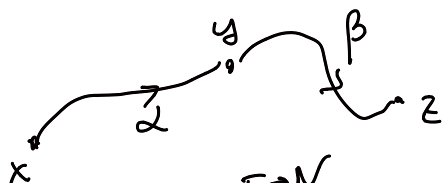


disco (R>1)

$H : I \times I \to D^2 \qquad H(s,t) = \left(\cos \pi s, \ (1-2t)\, \mathrm{sen}\, \pi s\right) \equiv \alpha_t(s)$



Def. Dati due cammini $\alpha : I \to N$ e $\beta : I \to N$
$\alpha(0) = x \quad \alpha(1) = y \qquad \beta(0) = y \quad \beta(1) = z$



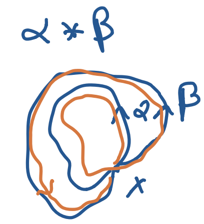
allora $\alpha * \beta : I \to N$ è il cammino da x a z def. da

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 < s < 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 < s < 1 \end{cases}$$
$s \in [0,1]$

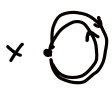
Def. Dato cammino $\alpha : I \to N$, $\alpha^{-1} : I \to N$ è
il cammino def. da $\quad \alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$

Def. LOOP. Un cammino chiuso o loop, con pto base x è
un CAMMINO in N da x a x, che è una
funz. continua $\alpha : I \to N$ t.c. $\alpha(0) = \alpha(1) = x$.

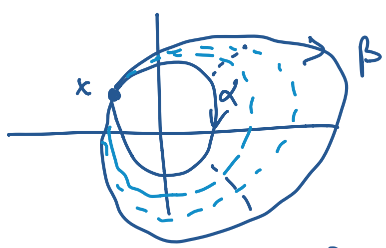
Prop. α, β, γ siano loop con pto base x, allora



1) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$
2) $\alpha \sim \gamma,\ \beta \sim \delta \Rightarrow \alpha * \beta \sim \gamma * \delta$
3) $e_x * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * e_x$ dove e_x è il loop. cost. $e_x(s) = x$
4) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$
5) $\alpha * \alpha^{-1} \sim e_x \sim \alpha^{-1} * \alpha$

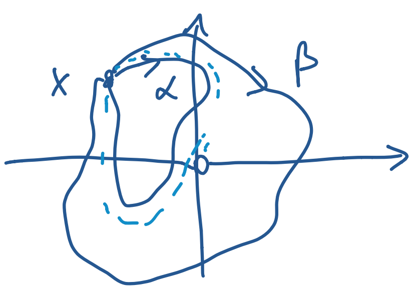


In $\mathbb{R}^2$ ogni loop è deformabile in un'altro loop.



$\alpha \sim \beta$

Invece in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ questo non è vero



$\alpha \not\sim \beta$

Def. GRUPPO FONDAMENTALE. Il gr. fond. di uno sp. topol. N con pto base x è

$$\pi_1(N, x) = \{\alpha : I \to N \text{ con } \alpha \text{ loop con pto base } x\} / \sim$$

"Essere omotopi" è una relaz. di equivalenza $\Rightarrow$ posso costruire delle classi di equivalenza. Gli elem. di $\pi_1(N, x)$ sono tali classi.

Teorema. $\pi_1(N, x)$ è un GRUPPO.

Dim. Cioè ci dovrebbe essere una legge di composizione:

dati $[\alpha]$ e $[\beta]$, $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha * \beta]$, t.c.

1) $\exists$ identità $[e_x]$: $[e_x]\cdot[\alpha] = [e_x * \alpha] = [\alpha]$
2) $\exists$ inverso $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$: $[\alpha^{-1}]\cdot[\alpha] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [e_x]$
3) Associatività: $([\alpha]\cdot[\beta])\cdot[\gamma] = [\alpha]\cdot([\beta]\cdot[\gamma])$ //

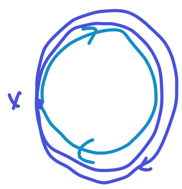
Es.

1) $N = \mathbb{R}^n$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{1\}$ (gruppo triviale)

2) $\pi_1(D^n, x) = \{1\} \quad \forall x \in D^n$

3) $N = S^1$ $\quad \pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ visto come gruppo additivo)

è lo spazio delle configurazioni del PENDOLO



$\forall n \in \mathbb{Z}$ c'è una classe in $\pi_1(S^1, x)$ i cui rappresentanti girano n volte attorno a S^1

$$[n] \ni \alpha(s) = e^{2\pi i n s}$$

$$[n]\cdot[m] = [e^{2\pi i n s}]\cdot[e^{2\pi i m s}] = [e^{2\pi i (n+m) s}]$$

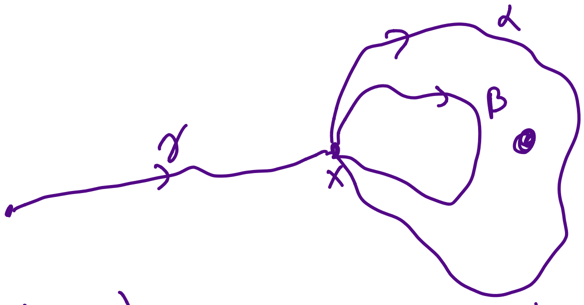
$\updownarrow \cong$

$[n+m]$

4) $\pi_1(S^n, x) = \{1\}$

sfera n-dim

Se N è <u>connesso (per archi)</u>



$\rightarrow \pi_1(N,x) \cong \pi_1(N,y)$

$\forall x,y \in N$

$\pi_1(N,y)$ $\qquad$ $\pi_1(N,x) \ni [\alpha], [\beta], \dots$

$\Downarrow$

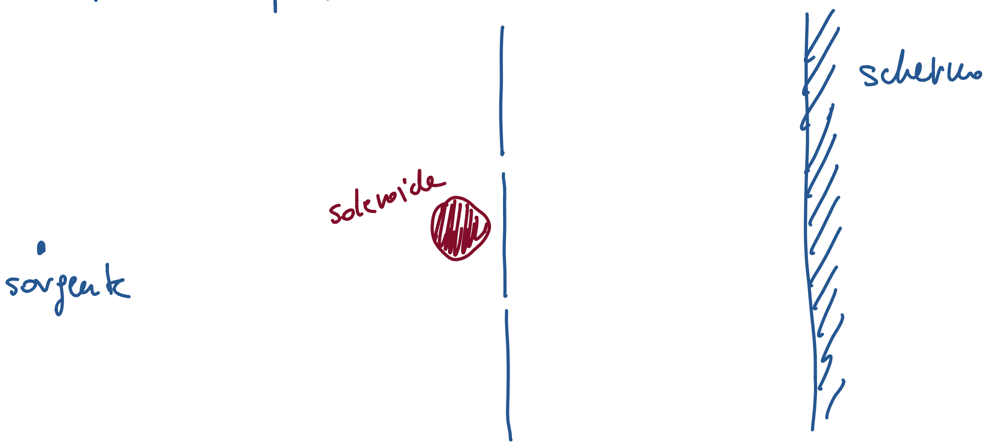
$[\gamma*\alpha*\gamma^{-1}], [\gamma*\beta*\gamma^{-1}], \dots$

Il gruppo fondam. di N, detto $\pi_1(N)$ può essere determinato prendendo un qualsiasi suo pto come pto base.

Def. N è detto SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\pi_1(N)=\{1\}$

Effetto di AHARONOV - BOHM

Fatto sperimentale:



Esp. fenditure: osservo delle frange d'interferenza sullo schermo

Solenoide lungo l'asse z di lunghezza infinita e completam. impenetrabile

↳ $B=0$ fuori dal solenoide

Si osserva che le frange d'interferenza cambiano variando il campo magnetico B dentro il solenoide; inoltre la fig. d'interferenza si ripete uguale quando il flusso del campo magn. Φ_B è shiftato di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Lo spazio delle config. della particella è

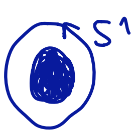
$$N = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \quad \to \quad \pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$$

Consideriamo il potenziale vettore

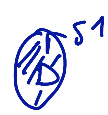
$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi \qquad \Rightarrow \quad B = dA = 0$$

parametro arbitrario

coordinata azimutale cilindrica



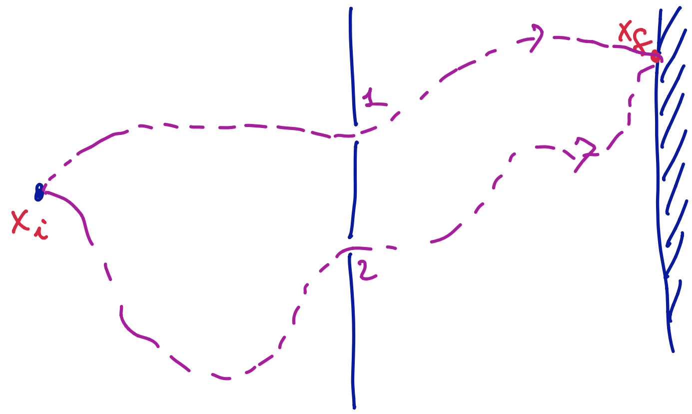
$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \theta \frac{\hbar c}{e}$$



$$\oint_{S^1} A = \int_D B = \Phi_B$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{e}{\hbar c}\,\Phi_B$$

Partiamo dal caso senza solenoide



$$K(x_f, x_i; T, 0) = \int\limits_{\{\text{tutte le traiettorie con } x(0)=x_i \ e\ x(T)=x_f\}} \mathcal{D}x \; e^{iS[x]/\hbar}$$

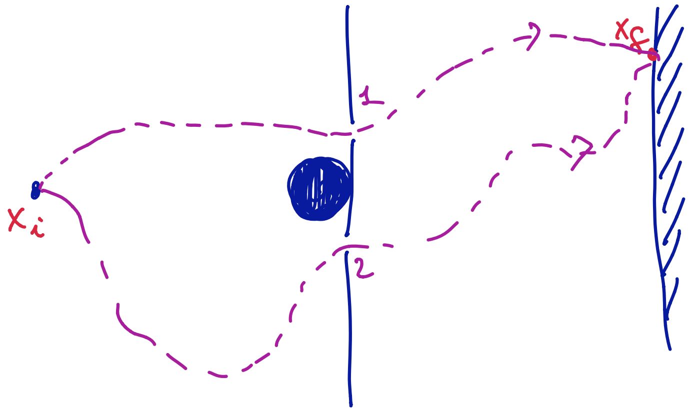
$$= \int\limits_{\substack{\{\text{traiettorie che}\\ \text{passano la fend. 1}\}}} \mathcal{D}x \; e^{iS[x]/\hbar} \; + \int\limits_{\substack{\{\text{traiettorie che}\\ \text{passano la fend. 2}\}}} \mathcal{D}x \; e^{iS[x]/\hbar}$$

(fenditura 2 è chiusa) (fenditura 1 chiusa)

$K_1(x_f, x_i; T, 0)$ $K_2(x_f, x_i; T, 0)$

Se le fasi di K_1 e K_2 sono uguali in x_f, abbiamo INTERFERENZA COSTRUTTIVA, altrimenti ci saranno cancellazioni.

Consideriamo il caso col SOLENOIDE



B fuori dal solenoide è nullo $\rightarrow$ A è cost. in $\bar{x}$.

Se $B \neq 0$ nel solenoide, $A \neq 0$ è l'azione della particella è cambiata $\rightsquigarrow$ c'è l'aggiunta del termine

$$-\frac{e}{c}\int dt\ \dot{\bar{x}}\cdot\bar{A} = -\frac{e}{c}\int_{\text{traiett.}} \bar{A}\cdot d\bar{x} = -\frac{e}{c}\int_{\text{traiett.}} A$$

Siccome A è costante, $\delta\mathcal{L}_A = \frac{d}{dt}\left(\bar{x}\cdot\bar{A}\left(-\frac{e}{c}\right)\right)$

cioè se $A \neq 0$ $\mathcal{L}$ differisce da $\mathcal{L}$ ad $A=0$ per una DERIVATA TOTALE $\Rightarrow$ le eq. di Lagrange rimangono invariate $\Rightarrow$

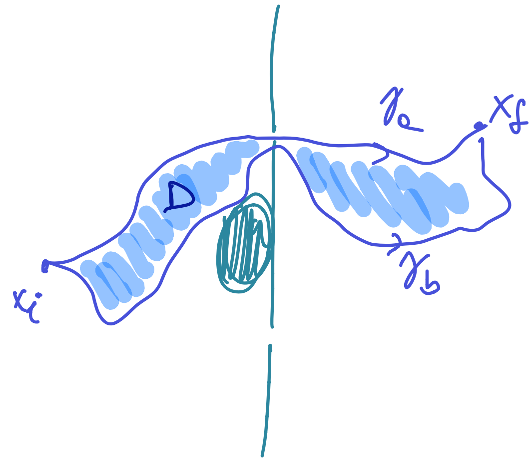
$\Rightarrow$ CLASSICAMENTE non si deve rilevare nessun effetto della presenza del solenoide.

Possiamo dimostrare che

$$\int_\gamma \bar{A}\cdot d\bar{x} = \int_\gamma A$$

dipende solo dai due estremi di γ se γ passa dalla

Stessa parte del solenoide.



$$\int_{\gamma_a} A - \int_{\gamma_b} A =$$

$$= \oint_{\gamma_b^{-1} * \gamma_a} A = \int_D B = 0$$

$\Rightarrow$ $\int_\gamma A$ non dipende dalla particolare traiettoria

$\Rightarrow$ $e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int_\gamma A}$ fattorizza fuori dal P.I.

B=0) $$K = K_1 + K_2 = \rho\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right) =$$

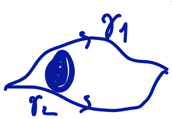
$$= \rho e^{i\phi_1}\left(1 + e^{i\underbrace{(\phi_2 - \phi_1)}_{\text{fase RELATIVA} \equiv \phi_{12}}}\right)$$

- quando $\phi_{12} = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
  ↳ interf. distruttiva
- quando $\phi_{12} = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
  ↳ interf. costruttiva

B≠0) $$K_B = e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int_{\gamma_1} A} K_1 + e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int_{\gamma_2} A} K_2$$

$$\overset{!}{=} \rho\left(e^{i\phi_1'} + e^{i\phi_2'}\right) = \rho e^{i\phi_1'}\left(1 + e^{i\underbrace{(\phi_2' - \phi_1')}_{\text{fase RELATIVA} \equiv \phi_{12}'}}\right)$$

$$\phi_{12}' = \phi_{12} - \frac{e}{\hbar c}\int_{\gamma_2^{-1} * \gamma_1} A = \phi_{12} - \underline{\frac{e\,\Phi}{\hbar c}}$$



⇝ diverse frange d'interferenza al variare di Φ

$$\Big[\; K(x_f, x_i; T, 0; B) = \int \mathcal{D}x\, e^{iS[x;B]/\hbar} = \int \mathcal{D}x\, e^{iS[x,0]/\hbar} e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int dt\, \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}} =$$

$$= \sum_{x_{cl}} e^{iS[x_{cl};B]/\hbar} \underbrace{\int_{\substack{y(0)=0\\ y(T)=0}} \mathcal{D}y\; e^{\frac{i}{2\hbar}\int dt\, dt'\, y(t) \left.\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\right|_{x_{cl}} y(t')} + \dots}_{\equiv \Delta}$$

non dipende da A

(A è cost. $\Rightarrow$ appare solo in termini lineari)

$$= \sum_{x_{cl}} e^{iS[x_{cl},0]/\hbar}\, e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\gamma_{cl}} A}\; \Delta$$

$$K(x_f, x_i; T, 0; B) = e^{iS[x_{cl}^{(1)},0]/\hbar}\, e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\gamma_{cl}^{(1)}} A} \cdot \Delta + e^{iS[x_{cl}^{(2)},0]/\hbar}\, e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\gamma_{cl}^{(2)}} A} \cdot \Delta$$

Quando $B=0$

$$K(x_f, x_i; T, 0; 0) = \Delta \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}^{(1)},0]}\left[1 + e^{\frac{i}{\hbar}\underbrace{\{S[x_{cl}^{(2)},0] - S[x_{cl}^{(1)},0]\}}_{\text{FASE RELATIVA } \phi_{12}}}\right]$$

Quando $B\neq 0$

$$K(x_f, x_i; T, 0; B) = \Delta e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}^{(1)},B]}\left[1 + e^{\frac{i}{\hbar}\underbrace{\{S[x_{cl}^{(2)},B] - S[x_{cl}^{(1)},B]\}}_{\text{FASE RELATIVA } \phi_{12}'}}\right]$$

$\Big]$

$$K_B = e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int_{\gamma_1} A} K_1 + e^{-\frac{ie}{c\hbar}\int_{\gamma_2} A} K_2$$

$$\phi_{12}' = \phi_{12} - \frac{e\Phi}{\hbar c}$$

$\Rightarrow$ A e A' sono EQUIVALENTI fisicam.
(cioè producono la stessa fig. di interf.)

se $\oint_{\gamma_2^{-1}*\gamma_1} A' = \underbrace{\oint_{\gamma_2^{-1}*\gamma_1} A}_{=\Phi} + \frac{\hbar c}{e} \cdot 2\pi m \quad m \in \mathbb{Z}$

$$A = \frac{\hbar c}{2\pi e}\theta \, d\varphi \qquad A' = \frac{\hbar c}{2\pi e}\theta' \, d\varphi$$

$$\oint A = \frac{\hbar c}{e}\theta \qquad \oint A' = \frac{\hbar c}{e}\theta'$$

$\Downarrow$

θ e θ' sono equivalenti se

$$\theta' = \theta + 2\pi m$$

A è parametrizzato da una variabile angolare θ.

$\Downarrow$

Scelte inequiv. di A sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$.

Classicamente tutti i valori di θ danno Lagrangiane equivalenti, mentre quantisticamente otteniamo teorie (=Lagr.) inequivalenti.

$\rightarrow$ Abbiamo diverse teorie QUANTISTICHE legate alla stessa teoria CLASSICA, e che sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$. Ci sono QUANTIZZAZIONI INEQUIVALENTI della stessa TEORIA CLASSICA, se lo sp. delle config. NON è sempl. connesso.

P.I. su spazi non semplicem. connessi

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int_{\{\text{tutti i cammini che connettono } q_1 \text{ e } q_2\}} \mathcal{D}q \; e^{iS[q]}$$

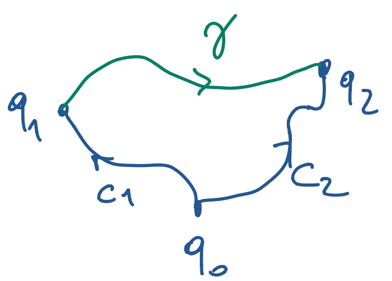
Questi cammini cadono in CLASSI di OMOTOPIA

(classi di equiv., dove la relaz. di equivalenza è l'essere deformabili continuamente)

Ci sono tante classi di omotopia di cammini da q_1 a q_2 quante classi di omotopia di loops (che iniziano e finiscono in un pto base q_0) cioè elem. di $\pi_1(N)$

Isomorfismo: fissiamo due cammini c_1 & c_2 che connettono q_0 e q_1 & q_2

$$[\gamma] \longleftrightarrow [c_2^{-1} * \gamma * c_1] \equiv [\alpha]$$



Le classi di omotopia sono INSIEMI DISGIUNTI $\Rightarrow$ il P.I. integra su un'unione disgiunta di classi di omotopia

$\Downarrow$

Integrale sui cammini K sarà una somma di integrali su una singola classe:

$$K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int_{\{\text{tutti i cammini da } q_1 \text{ a } q_2 \text{ nella classe di omotopia } \cong [\alpha]\}} \mathcal{D}q_\alpha \; e^{-S_E[q]/\hbar}$$

$\alpha \in \pi_1(N)$

In principio possiamo def. K come una somma PESATA dei K_α

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) \equiv \sum_{\alpha \in \pi^1(N)} \chi(\alpha)\, K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

I pesi complessi $\chi(\alpha)$ devono soddisfare le seguenti condiz.:

1) l'ampiezza totale deve essere indipendente dalla scelta di c_1 e c_2;

2) l'ampiezza deve soddisfare

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int dq\, K(q_2, q; t_2, t)\, K(q, q_1; t, t_1) \qquad t_1 < t < t_2$$

$$\Downarrow$$

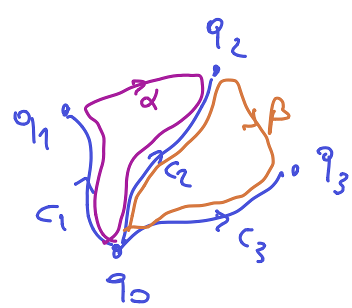
$$\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha)\, \chi(\beta)$$ $\rightsquigarrow$ χ è una mappa che rispetta il prodotto del gruppo $\pi_1(N)$ (omomorfismo di gruppi)

$\chi(\alpha)$ forma una rappresentazione unitaria 1 dim del gruppo fondam. $\pi_1(N)$, cioè $|\chi(\alpha)| = 1$

χ = " carattere del gruppo "

Dim. $\alpha \mapsto c_2 * \alpha * c_1^{-1} = \gamma$

Ora prendiamo tre loops α, β, δ con pto base q_0 e t.c. $\beta * \alpha = \delta$



Siano q_1, q_2, q_3 pti di N

$c_3 * \rho * c_1^{-1}$ cammino da q_1 a q_3

Ogni cammino da q_1 a q_3 può essere splittato in un cammino da q_1 a q_2 e uno da q_2 a q_3

$$\underbrace{c_3 * \rho * c_1^{-1}}_{q_1 \to q_3} = \underbrace{c_3 * \beta * c_2^{-1}}_{q_2 \to q_3} * \underbrace{c_2 * \alpha * c_1}_{q_1 \to q_2}, \qquad \rho = \beta * \alpha, \qquad c_2^{-1} * c_2 = e_{q_0}$$

$$K(q_3, q_1; t_3, t_1) = \int dq_2\, K(q_3, q_2; t_3, t_2)\, K(q_2, q_1; t_2, t_1) \qquad t_1 < t_2 < t_3$$

$$\Downarrow$$

Per def.

$$\sum_{\rho \in \pi_1(N)} \chi(\rho) K_\rho(q_3, q_1; t_3, t_1) = \sum_{\alpha, \beta \in \pi_1(N)} \chi(\alpha)\chi(\beta) \int dq_2\, K_\beta(q_3, q_2; t_3, t_2) K(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$K_\rho(q_3, q_1; t_3, t_1) = \int dq_2\, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$\sum_\beta \to \sum_\rho \qquad \beta = \rho * \alpha^{-1}$$

$$\sum_{\rho, \alpha \in \pi_1(N)} \chi(\alpha)\chi(\rho * \alpha^{-1}) \int dq_2\, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$\sum_{\rho, \alpha \in \pi_1(N)} \chi(\gamma) \int dq_2\, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \quad \forall K$$

$$\Longrightarrow \quad \chi(\rho) = \chi(\alpha)\chi(\rho * \alpha^{-1})$$

o detto diversamente

$$\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$$

Prendiamo altri cammini arbitrari $\bar{c}_1$ e $\bar{c}_2$ $\neq c_1, c_2$
$q_0 \to q_1$ $\quad q_0 \to q_2$

$$\bar{c}_2 * \alpha * \bar{c}_1^{-1} = c_2 * c_2^{-1} * \bar{c}_2 * \alpha * \bar{c}_1^{-1} * c_1 * c_1^{-1}$$

$$= c_2 * \mu * \alpha * \lambda * c_1^{-1}$$

loops (con pto base q_0)

Il valore assoluto dell'ampiezza totale deve essere indip. dal rimpiazzare $c_1 \to \bar{c}_1$ e $c_2 \to \bar{c}_2$.

$$|K(q_2,q_1)| = \left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(q_2,q_1)\right| = \left|\sum_{\mu*\alpha*\lambda} \chi(\mu*\alpha*\lambda)\, K_\alpha(q_2,q_1)\right|$$

$$= \left|\sum_\alpha \chi(\mu)\,\chi(\lambda)\,\chi(\alpha)\, K_\alpha\right| =$$

$$= |\chi(\mu)\chi(\lambda)|\, \left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha\right|$$

$$\Downarrow$$

$$|\chi(\mu*\lambda)| = 1 \qquad \forall \mu, \lambda \quad \text{, cioè}$$

$$|\chi(\alpha)| = 1 \qquad \forall \alpha \in \pi_1(N) \quad //$$