**Corollario** $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ e $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

**Dim** Dimostriamolo nel caso complesso (nel caso reale si procede in modo analogo).

$a = [0,1] \in \mathbb{C}P^1 \rightsquigarrow \mathbb{C}P^1 - \{a\} \cong \mathbb{C}$ (carta affine)

$\Rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong \hat{\mathbb{C}} \cong \hat{\mathbb{R}}^2 \cong S^2$ perché $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

**Teorema di Weierstrass** Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua su uno spazio $X$. Se $X$ è compatto allora $f$ ammette un punto di minimo $a \in X$ e un punto di massimo $b \in X$, cioè

$$\min f = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = \max f \quad \forall x \in X.$$

**Dim** $K := f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto, quindi chiuso e limitato $\Rightarrow \alpha = \inf K \in Cl_{\mathbb{R}} K = K$ e analogamente $\beta = \sup K \in K \Rightarrow \alpha = \min K$ e $\beta = \max K \rightsquigarrow \exists\, a, b \in X$ t.c. $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.

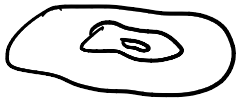
**Corollario** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico compatto. Allora esistono due punti $x_1, x_2 \in X$ a massima distanza. In particolare $X$ è limitato.

**Dim** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua e $X \times X$ è compatto $\Rightarrow \exists\, (x_1, x_2) \in X \times X$ t.c. $d(x_1, x_2) = \max d$.

## Teorema dell'intersezione di Cantor

Sia $X$ uno spazio di Hausdorff e sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di sottospazi compatti e non vuoti t.c. $K_{n+1} \subset K_n \subset X$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \phi.$$



$K_n$

**Dim** $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ supponiamo per assurdo $K = \phi$

$U_n := X - K_n$ aperto e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $K_1 \subset U_{\bar{n}} \Rightarrow K_{\bar{n}} \subset K_1 \subset U_{\bar{n}} = X - K_{\bar{n}}$ assurdo.

**Def** Uno spazio $X$ è compatto per successioni (o sequenzialmente compatto) se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

**Teorema** Sia $X$ uno spazio metrizzabile compatto. Allora $X$ è compatto per successioni.

**Dim** Sia $d: X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ $\rightsquigarrow$

$A_n = Cl_X \{x_m \mid m \geq n\} \neq \phi$ chiuso in $X \Rightarrow$

$A_n$ compatto e inoltre $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \phi$. Sia $a \in A \Rightarrow a \in Cl_X A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$n_0 := 0$

$\exists\, n_k > n_{k-1}$ t.c. $x_{n_k} \in B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap \{x_m \mid m \geq n_{k-1}+1\}$, $k \geq 2$.

$d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$

$\implies (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione convergente.

<u>NB</u> Vale anche il viceversa (che non dimostriamo): se $X$ è metrizzabile e compatto per successioni, allora $X$ è compatto.

Dal teorema precedente segue subito il seguente teorema.

## Teorema di Bolzano-Weierstrass $\boxed{E}$

Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una successione limitata. Allora $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente.

## Spazi connessi

**Def** Sia $X$ uno spazio topologico. Diciamo che $X$ è <u>connesso</u> se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di $X$ sono $X$ e $\emptyset$.

**Es** 1) $\forall X$ banale è connesso (ovvio)

2) $X$ discreto è connesso $\iff \# X = 1$. Infatti i punti sono aperti e chiusi

3) $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ non è connesso, infatti $[0,1] \subset X$ è aperto e chiuso.

4) $\mathbb{R}_\ell$ (retta di Sorgenfrey) <u>non è connessa</u>, infatti $[0,1[$ è aperto e chiuso in $\mathbb{R}_\ell$.

**Teorema** Uno spazio $X$ è non connesso $\iff$ esistono $U, V \subset X$ aperti non vuoti t.c. $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.

**Dim** $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists\, U \subset X$ aperto e chiuso t.c. $U \neq \emptyset$ e $U \neq X$ $\Rightarrow$ $V = X - V$ aperto. $U$ e $V$ soddisfano le tesi.

$\boxed{\Leftarrow}$ $U = X - V$ è aperto e chiuso, $U \neq \emptyset$ e $U \neq X$.

**Teorema** $[0,1]$ è connesso (con la topologia Euclidea).

**Dim** Per assurdo, supponiamo $[0,1]$ non connesso

$\Rightarrow \exists\, U, V \subset [0,1]$ aperti non vuoti t.c. $[0,1] = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow U = [0,1] - V$ e $V = [0,1] - U$ sono anche chiusi in $[0,1]$ $\Rightarrow$ $U$ e $V$ compatti.

Allora $U$ e $V$ hanno massimo:

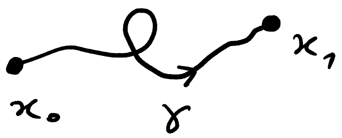
$$u := \max U \in U, \quad v := \max V \in V.$$

Mostriamo che $u = 1$, infatti se $u < 1$ allora $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $[u, u+\varepsilon[\, \subset U \Rightarrow \exists\, u' > u$ t.c. $u' \in U$, contraddizione.

In modo simile si dimostra che $v = 1$.

Quindi $1 \in U \cap V$, contraddizione.

**Def** Sia $X$ uno spazio topologico. Un'applicazione continua $\gamma : [0,1] \to X$ è detta cammino tra $x_0 = \gamma(0)$ e $x_1 = \gamma(1)$.




**Def** Sia $X$ uno spazio topologico. Diciamo che $X$ è connesso per archi se per ogni $x_0, x_1 \in X$ esiste un cammino $\gamma : [0,1] \to X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

**Teorema** Sia $X$ uno spazio connesso per archi. Allora $X$ è connesso.

**Dim** Per assurdo, supponiamo che $\exists$ aperti non vuoti $U, V \subset X$ t.c. $X = U \cup V$ e $U \cap V = \phi$.
Siano $x_0 \in U$ e $x_1 \in V$ e sia $\gamma : [0,1] \to X$ un cammino tra $x_0$ e $x_1$. Allora,
$A = \gamma^{-1}(U)$ e $B = \gamma^{-1}(V)$ sono aperti in $[0,1]$ t.c. $[0,1] = A \cup B$. Inoltre $A \cap B = \phi$, $0 \in A$, $1 \in B$. Quindi $[0,1]$ non è connesso, contraddizione.

**Teorema** Siano $X$ e $Y$ due spazi e sia $f : X \to Y$ continua e suriettiva.

i) Se $X$ è connesso allora $Y$ è connesso.

ii) Se $X$ è connesso per archi allora $Y$ è connesso per archi.

**Dim** i) Per assurdo, supponiamo $Y$ non connesso $\Rightarrow \exists\, U, V \subset Y$ aperti non vuoti t.c. $Y = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $A = f^{-1}(U)$, $B = f^{-1}(V) \subset X$ aperti non vuoti t.c. $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ contraddizione.

ii) $y_0, y_1 \in Y \Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in X$ t.c. $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$

$\exists\, \gamma : [0,1] \to X$ cammino tra $x_0$ e $x_1$

$\Rightarrow \mu = f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ cammino tra $y_0$ e $y_1$.

**Corollario** Sia $f : X \to Y$ continua.

i) Se $X$ è connesso allora $f(X)$ è connesso.

ii) Se $X$ è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi.