

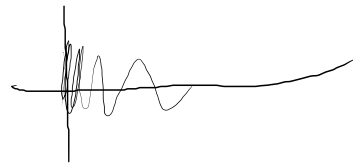
Estensione della definizione di integrale a insiemi più generali

$$E \subseteq \mathbb{R} \quad E = [a, b] - \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \quad \text{con } x_i \in [a, b] \quad i=1, \dots, p$$

Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  limitate, diremo che  $f$  è integrabile su  $E$  se,  
posto  $f^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \{x_1, \dots, x_p\} \end{cases}$ ,

si ha che  $f^*$  è integrabile su  $[a, b]$ .

$$\int_E f \, dm := \int_{[a, b]} f^* \, dm$$



$$Es: \quad E = ]a, b[ \quad \text{con} \quad f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad x \in ]0, 1]$$

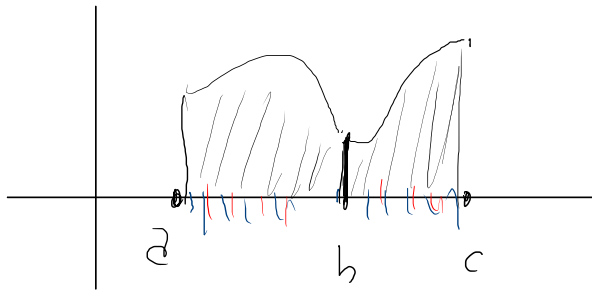
$$\int_{]0, 1]} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$$

## Teorema di additività dell'integrale

Si ha  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$   $b \in ]a, c[$

se  $f|_{[a, b]}$  integrabile su  $[a, b]$  e  $f|_{[b, c]}$  integrabile su  $[b, c]$ .

Allora  $f$  è integrabile su  $[a, c]$  e 
$$\int_{[a, c]} f \, d\mu = \int_{[a, b]} f \, d\mu + \int_{[b, c]} f \, d\mu$$



Teorema del confronto per l'integrale

Siano  $g, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili,  $\underline{f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]} \Rightarrow \int_{[a, b]} f \, dm \leq \int_{[a, b]} g \, dm$

Dim Sio  $\underline{f(x) \geq 0 \quad \forall x}$  dimostra che  $\int_{[a, b]} f \, dm \geq 0$

in lo  $\Rightarrow (f, S) \geq 0 \quad \forall S$  decomposita  $\Rightarrow \int_{[a, b]} f \, dm \geq 0$ .

Integrabilità del prodotto

$g, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili  $\Rightarrow \overset{\text{prodotto}}{f \cdot g}$  è integrabile

⚠ Non c'è una formula che fornisca  $\int_{[a, b]} f \cdot g \, dm$  se conosciamo  $\int_{[a, b]} f \, dm$  e  $\int_{[a, b]} g \, dm$

Dem (primo si dimostra che  $f$  integrabile  $\Rightarrow f^2$  integrabile;  
poi si considera  $(f+g)^2 = \underbrace{f^2} + 2 \underbrace{fg} + \underbrace{g^2}$ )

---

$$\int_{[a,b]} f dm$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{[a,b]} f dm$$

Adozione: sia  $f(x)$  (indica con  $x$  la variabile) ; si usa scrivere

$$dm = dx$$

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f dm$$

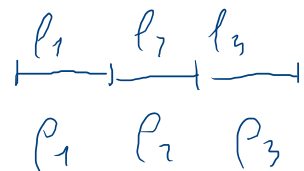
~~$$\int_{[a,b]} f$$~~





massa  
densità di massa

$\rho(x)$



$$m = \rho \cdot l$$

$$m = \boxed{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2 + \rho_3 l_3}$$

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \cdot l_k$$

$\uparrow$

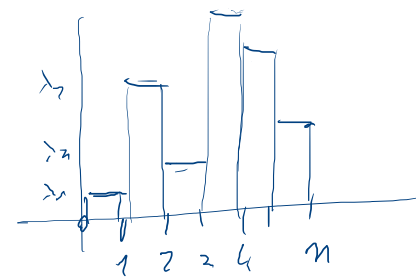
$\rightsquigarrow$

$$\int_{[0, l]} \rho(x) \cdot dx$$

$dm$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}$$

media aritmetica



$$l([0, n]) = n$$

$$\frac{1}{l([0, n])} \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot m([k-1, k])$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \lambda(x) dx$$

media di  $\lambda$  nell'intervallo  $[a, b]$ .



## Teorema dello medio integrale

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  integrabile; allora

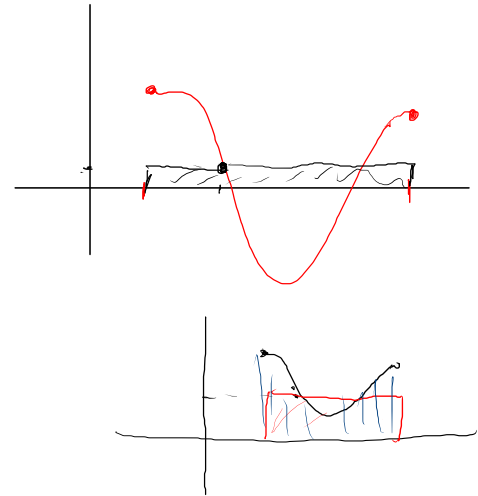
$$\inf_{[a, b]} f \cdot (b-a) \leq \int_{[a, b]} f \, d\mu \leq \sup_{[a, b]} f \cdot (b-a)$$

Inoltre, se  $f$  è continua, esiste  $\xi \in [a, b]$  tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_{[a, b]} f \, d\mu$$

$$\left[ f(\xi) (b-a) = \int_{[a, b]} f \, d\mu \right]$$

$$\inf_{[a, b]} f \cdot (b-a)$$



$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) = s(f, S) \quad \text{con} \quad S = \{[a,b]\}$$

$$\sup_{[a,b]} f \cdot (b-a) = S(f, S) \quad s(f, S) \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu \leq S(f, S)$$

Si o ero  $f$  continuo  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  allora per Weierstrass esistono  $\min f, \max f$

$$\left( \min_{[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \, d\mu \leq \max_{[a,b]} f(x) \right)$$

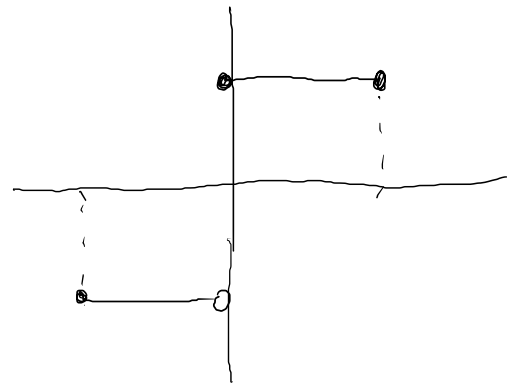
Inoltre  $f([a,b])$  è un intervallo per il lemma di connessione

$$\Rightarrow f([a,b]) = [\min f, \max f] \quad \text{il numero } \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \, d\mu \in f([a,b])$$

quando esiste  $\xi \in [a, b]$  tale che  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dm$ .

$$E \supset f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{[-1,1]} f(x) dx = \int_{[-1,0]} -1 dx + \int_{[0,1]} 1 dx = 0$$



doneble existev  $\xi \in [-1, 1]$  tal  $h$   $f(\xi) = 0$  Falso!

## funzione localmente integrabile

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I$  intervallo qualsiasi (anche  $\mathbb{R}$ )

$f$  si dice localmente integrabile su  $I$  se per ogni  $[a, b] \subseteq I$

$f|_{[a, b]}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile su  $[a, b]$ .

oss: se  $I = [a, b]$   $f$  loc. integr.  $\equiv f$  integr.

es:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  continua  $\Rightarrow f$  è localmente integrabile

es:  $f(x) = [x]$  parte intera non

Def: integrale orientato

Se  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile; siano  $a, b \in I$ ; definiamo

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x) dx & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ - \int_{[b,a]} f(x) dx & \text{se } a > b \end{cases}$$

oss:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \forall a, b$

OSS: per l'integrale orientato valgono quasi tutti i risultati visti

(lineare, vol. assoluto...)

non vale per il valore

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Medio integral se  $a < b$

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) < \int_a^b f(x) dx < \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

se  $a > b$

$\inf_{[b,a]} f$

$$< \frac{1}{a-b} \left( \int_{[b,a]} f dm \right) < \sup_{[b,a]} f$$

Valore

$$\frac{1}{b-a} \cdot \left( - \int_{[b,a]} f dm \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f dm$$

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_1^0 1 dx = -1$$

$$1 \geq 0$$

OSS : (confronto e valore assoluto)

se  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  allora  $|f|$  è integrabile; inoltre si ha

$$\left| \int_{[a, b]} f dm \right| \leq \int_{[a, b]} |f| dm \quad \leftarrow$$

Dem:  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  e quindi

$$-\int_{[a, b]} |f| dx \leq \int_{[a, b]} f dx \leq \int_{[a, b]} |f| dx \quad \rightarrow$$

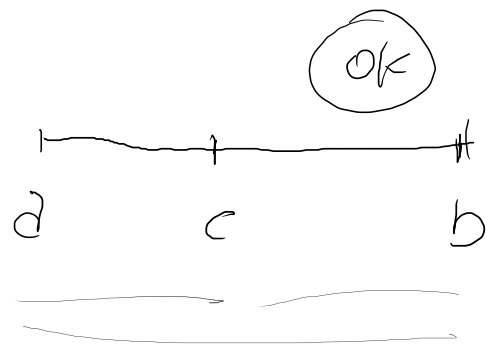
per l'integrale orientato si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

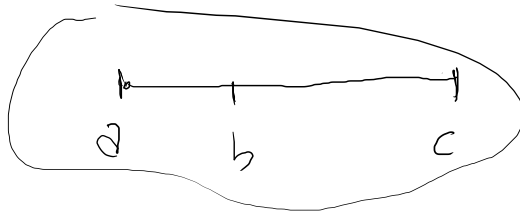
Formule di Chasles (di additività per l'integrale orientato)

Sia  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile;  $a, b, c \in I$ , allora

$$\int_a^b f dm = \int_a^{\overset{c}{\circ}} f dm + \int_{\underset{c}{\circ}}^b f dm$$



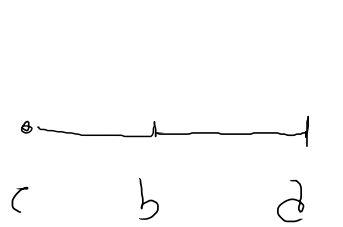
Sei  $a < b < c$



$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

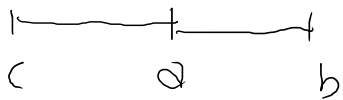
$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$$



$$\int_c^a = \int_c^b + \int_b^a$$

$$\int_c^a = \int_c^b - \int_b^c$$

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_c^b = \int_a^c + \int_c^b$$



# Funzione integrale

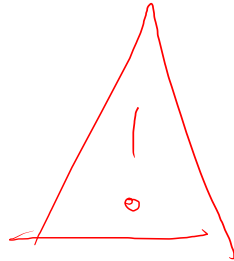
$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile  $x_0 \in I$

Definiamo funzione integrale centrata in  $x_0$  la funzione  $F_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Red arrows point from  $x$  in the integrand to the  $x$  in the upper limit, and from  $x_0$  in the lower limit to the  $x_0$  in the function name.

$$= \int_{x_0}^x f(\text{Peppino}) d\text{Peppino}$$



$$F_{x_0}(z) = \int_{x_0}^z f(x) dx$$

Red arrows point from  $z$  in the integrand to the  $z$  in the upper limit, and from  $x_0$  in the lower limit to the  $x_0$  in the function name.

## Teorema di continuità della funzione integrale

Sia  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile,  $x_0 \in I$ . Allora la funzione

$$F_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R} \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{è continua.}$$

Dcm Sia  $\hat{x}$  interno all'intervallo  $I$ ; prendo  $[a, b] \subset I$  tale che  $\hat{x} \in ]a, b[$



$f$  è limitata su  $[a, b]$ , sia  $M$  tale che  $|f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a, b]$ .

Fissato  $\varepsilon > 0$  dimostreremo che esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall x$  con  $|x - \hat{x}| < \delta$

$$\text{si ha } \underbrace{|F_{x_0}(x) - F_{x_0}(\hat{x})|} < \varepsilon.$$

$$|F_{x_0}(x) - F_{x_0}(\tilde{x})| = \left| \int_{\textcircled{x_0}}^x f(t) dt - \int_{\textcircled{x_0}}^{\tilde{x}} f(t) dt \right| = \left| \int_{\tilde{x}}^x f(t) dt \right| \leq \#$$

$$+ \int_{\tilde{x}}^{x_0} f(t) dt$$

$$\# \leq \left| \int_{\tilde{x}}^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \right| \leq \left| \int_{\tilde{x}}^x M dt \right| = M \cdot |x - \tilde{x}| < \varepsilon \quad \text{w} \quad \left( |x - \tilde{x}| < \frac{\varepsilon}{M} \right)$$

w  $t \in [a, b]$

w  $x \in [a, b]$  and  $t \in [a, b]$



$F_{x_0}$  derivabile?

## Teorema fondamentale del calcolo

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $x_0 \in I$ . Allora la funzione  $F_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  è derivabile su  $I$  e  $F_{x_0}'(x) = f(x)$ .