Teorema di determinazione di un'applicazione lineare Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Consideriamo una base $(v_1, \dots, v_n)$ per V e vettori $w_1, \dots, w_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che
$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n.$$

Dim Unicità Supponiamo che $f: V \to W$ sia lineare e t.c. $f(v_j) = w_j \quad \forall j = 1, \dots, n$.
$\forall v \in V \quad \exists!\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$
$$\Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j w_j$$
Dall'unicità delle componenti $x_1, \dots, x_n$ segue che f è univocamente determinata.

Esistenza Poniamo $f: V \to W$ definita come
$$f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) := \sum_{j=1}^n x_j w_j \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$$
Allora f è ben definita perché qualunque $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$.
Mostriamo che f è lineare.
Siano $\lambda \in \mathbb{K}$, $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, $v' = \sum_{j=1}^n x_j' v_j \in V$
$$f(v + v') = f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n x_j' v_j'\right) = f\left(\sum_{j=1}^n (x_j + x_j') v_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j + x'_j)\, w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\, w_j + \sum_{j=1}^{n} x'_j\, w_j = f(v) + f(v')$$

$$f(\lambda v) = f\left(\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda x_j\, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j\, w_j =$$
$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\, w_j = \lambda\, f(v).$$

Quindi f è lineare.

Il teorema precedente si generalizza al caso di spazi vettoriali di dimensione infinita.

Teorema (generalizzazione del precedente)

Siano V e W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Siano $(v_j)_{j\in J}$ una base per V e $(w_j)_{j\in J}$ una famiglia di vettori di W. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ t.c. $f(v_j) = w_j \quad \forall j \in J$.

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa, e la lascio per esercizio. Ricordiamo che le combinazioni lineari sono sempre finite.

<u>NB</u> Su V scegliamo una <u>base</u> $(v_1, \dots, v_n)$ (o $(v_j)_{j\in J}$ in generale) mentre i vettori $w_1, \dots, w_n$ di W ($(w_j)_{j\in J}$ in generale) <u>non</u> sono necessariamente una base: sono vettori qualunque!

Teorema Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $f: V \to W$ lineare. Allora

i) f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f manda una base di V in vettori linearmente indipendenti di W;

ii) f è suriettiva $\Leftrightarrow$ f manda una base di V in un insieme di generatori per W;

iii) f è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f manda una base di V in una base di W.

Dim i) Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base per V

$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo f iniettiva.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0_W \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0_W \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V \Rightarrow$$

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n) \text{ lin. indip.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ siano lin. indip.

$$f(v) = 0_W, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0_W \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$v = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow f \text{ iniettiva.}$$

ii) Sappiamo che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ da cui segue subito l'asserto.

iii) f isomorfismo $\Leftrightarrow$ f lineare, iniettiva e suriettiva $\Leftrightarrow$ f lineare manda una base di V in una base di W per i) e ii).

Teorema Supponiamo che $\dim V = \dim W = n < \infty$. Sia $f: V \to W$ lineare. Allora le seguenti sono equivalenti:

i) f è iniettiva;

ii) f è suriettiva;

iii) f è un isomorfismo.

Dim Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base per V.

i) $\Rightarrow$ iii) f iniettiva $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ lin. indip.
$\Rightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ base per W perché $\dim W = n$. Quindi f è un isomorfismo per il teorema precedente.

iii) $\Rightarrow$ ii) ovvio

ii) $\Rightarrow$ i) f suriettiva $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ generatori per $W \Rightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ base per W perché $\dim W = n$. Quindi f è iniettiva (è un isomorfismo).

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le seguenti sono equivalenti:

i) $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = I_n$ oppure $BA = I_n$

ii) $\operatorname{rg} A = n$

iii) A è invertibile, cioè $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = I_n$.

Dim Segue subito dal teorema con $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Teorema di classificazione degli spazi vettoriali

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con $\dim V < \infty$. Allora $V \cong W \iff \dim V = \dim W$.

Dim Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base per V, $n = \dim V$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $f : V \to W$ un isomorfismo. Allora $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ è una base per $W \Rightarrow \dim W = n = \dim V$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $\dim V = \dim W = n$ e sia $(w_1, \dots, w_n)$ una base per W. Per il teorema di determinazione esiste (ed è unica) un'applicazione lineare $f : V \to W$ t.c. $f(v_i) = w_i \ \forall i = 1, \dots, n$. Allora f manda una base di V in una base di W e quindi f è un isomorfismo $\Rightarrow V \cong W$.

OSS Quindi gli spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ sono classificati, a meno di isomorfismi, dalla dimensione.
Nel caso di spazi vettoriali di dimensione infinita vale un risultato simile ma occorre la nozione di numero cardinale, che non studiamo.

Corollario $\mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^n \iff m = n$.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\dim V = n$. Allora $V \cong \mathbb{K}^n$.

Cambio di base

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ due basi di V.

$G := M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}(id_V) \in M_n(\mathbb{K})$ matrice del cambiamento di base da $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}^{\mathcal{V}'} \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$X' = GX \quad e \quad X = G^{-1}X'$$

G è invertibile perché matrice di id_V rispetto a basi del dominio e del codominio.

<u>OSS</u> $M_{\mathcal{V}}(id_V) = I_n$.

La j-esima colonna di G è il vettore colonna di $\mathbb{K}^n$ che rappresenta le componenti di v_j rispetto alla base $\mathcal{V}'$!

<u>OSS</u> Sia $\Phi_{\mathcal{V}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'applicazione lineare t.c. $\Phi_{\mathcal{V}}(v_j) = e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$, dove

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

Allora $\Phi_{\mathcal{V}}$ è un isomorfismo e

$$\Phi_{\mathcal{V}}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{cioè}$$

$\Phi_{\mathcal{V}}$ manda i vettori nelle componenti rispetto a $\mathcal{V}$.

Allora il diagramma seguente è commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^n \arrow[d, "L_G"] \\
V \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"'] & \mathbb{K}^n \\
\end{tikzcd}
\qquad L_G(X) = GX.
$$

(commutativo vuol dire che $\Phi_{\mathcal{V}'} = L_G \circ \Phi_{\mathcal{V}}$)

Sia ora W un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ e $\mathcal{W}' = (w_1', \dots, w_m')$ due basi di W. Consideriamo un'applicazione lineare $f : V \to W$. Poniamo

$$A = M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f), \quad A' = M^{\mathcal{W}'}_{\mathcal{V}'}(f) \qquad Y = AX, \quad Y' = A'X'$$

$$G = M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}(id_V), \quad T = M^{\mathcal{W}'}_{\mathcal{W}}(id_W) \qquad X' = GX, \quad Y' = TY$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{V} & \mathcal{W} \\[-20pt]
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_V"'] & W \arrow[d, "id_W"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W \\[-20pt]
\mathcal{V}' & \mathcal{W}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & Y \arrow[ddd, mapsto] \\
 & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "L_G"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "L_T"] & \\
 & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{A'}"'] & \mathbb{K}^m & \\
X' \arrow[rrr, mapsto] & & & Y'
\end{tikzcd}
$$

$$M^{\mathcal{W}'}_{\mathcal{V}'}(f) = M^{\mathcal{W}'}_{\mathcal{V}'}(id_W \circ f \circ id_V) =$$

$$= M^{\mathcal{W}'}_{\mathcal{W}}(id_W)\, M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)\, M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V) \Rightarrow \boxed{A' = TAG^{-1}}$$

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, mapsto, "L_{G^{-1}}"] \arrow[rrr, bend right, mapsto, "L_{A'}"'] & X \arrow[r, mapsto, "L_A"] & Y \arrow[r, mapsto, "L_T"] & Y'
\end{tikzcd}
$$