Elementi di codifica di canale

Fulvio Babich (babich@units.it)

DIA – Università di Trieste

Tecniche di protezione contro gli errori

- Codici di rivelazione d'errore e algoritmi di ritrasmissione (Automatic Repeat reQuest - ARQ).
- Codici ad autocorrezione d'errore (Forward Error Correction - FEC).
- Codifica: a k bit di informazione vengono associati n bit per la trasmissione sul canale, con $n>k$; viene così introdotta in modo sistematico della ridondanza che può essere usata in ricezione per rivelare e/o correggere errori. Nel tempo in cui vengono generati k bit d'utente devono essere trasmessi n bit di canale; pertanto si riduce il tempo per la trasmissione di un bit e, di conseguenza, aumenta la banda utilizzata.
- Tasso del codice: $R_c=k/n<1$.
- Codici a blocco: Gli n-k bit di ridondanza dipendono solo dai k bit d'utente attuali; l'operazione di codifica è, pertanto, senza memoria.
- Codici convoluzionali: Gli n-k bit di ridondanza dipendono k bit d'utente attuali e da $(N-1)k$ bit d'utente precedenti (N è detta lunghezza di vincolo); l'operazione di codifica è, quindi, con memoria.

Codici a blocco binari

- Le sequenze di n bit prodotte dal codificatore vengono dette parole del codice.
- Peso di una parola di codice: è il numero di bit diversi da 0 della parola di codice.
- Distanza di Hamming fra due parole di codice: è il numero di bit in cui differiscono; è anche il peso della parola ottenuta sommando modulo 2 le parole di codice. I codici che considereremo sono codici lineari, nei quali la somma fra due parole di codice è ancora una parola di codice. Pertanto, il peso della parola di peso minimo rappresenta la distanza minima, $d_{\min}$, fra due parole di codice. Per i codici lineari la parola nulla è una parola di codice.
- Prestazioni di un codice: dipendono dalla distanza minima. L'operazione di decodifica (hard) avviene in genere a massima verosimiglianza, associando cioè alla n-pla ricevuta la parola di codice più vicina.
- Un codice con distanza minima $d_{\min}$ può correggere al più errori di peso $\lfloor (d_{\min}-1)/2 \rfloor$, e rivelare al più errori di peso $d_{\min}$ -1. Un codice viene usato per correggere errori di peso al più $t_c \le \lfloor (d_{\min}-1)/2 \rfloor$ e rivelare errori di peso l, dove l soddisfa la $t_c < l < d_{\min} - t_c$.

Codici a blocco a verifica di parità (*parity check codes*)

- Sono codici lineari.
- Codifica: si effettua utilizzando la matrice generatrice **G** [k x n]; il vettore codificato **x** si ottiene dal vettore non codificato **u** mediante l'operazione **x=u G** (operazioni modulo 2).
- Rivelazione d'errore (verifica di parità): si effettua utilizzando la matrice di parità **H** [(n-k) x n]; se il vettore ricevuto è $\mathbf{r} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e}$, dove **e** è il vettore di errore, si calcola **s=yH'** (dove $\oplus$ indica l'operazione di somma modulo 2 e ' indica l'operazione di trasposizione). Se non ci sono stati errori il vettore **s** è il vettore nullo. Risulta essere **GH'**= 0. Il vettore **s** viene denominato sindrome.
- Correzione d'errore: a ogni vettore **s** diverso dal vettore nullo associo un vettore $\mathbf{e}_1$, in modo che il vettore decodificato sia $\mathbf{d} = \mathbf{r} \oplus \mathbf{e}_1$. L'associazione avviene a minima distanza (a ogni sindrome associo la sequenza d'errore a peso minimo che produce quella data sindrome). Le sindromi non nulle (e quindi le sequenze d'errore correggibili) sono $2^{n-k}-1$.
- Codici sistematici: i primi k bit della parola di codice sono i bit d'utente. Per essi $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \vdots \mathbf{P}]$, $\mathbf{H} = [\mathbf{P}' \vdots \mathbf{I}_{n-k}]$.

Codici ciclici

- Sono codici lineari. Una permutazione ciclica di una parola di codice produce una parola di codice.
- A ogni sequenza binaria viene associato un polinomio i cui coefficienti sono i bit che compongono la sequenza.
- I bit di ridondanza vengono individuati utilizzando un algoritmo di divisione. Il polinomio divisore viene indicato con $g(x)$, e ha grado n-k. Pertanto un codice ciclico è caratterizzato dalla terna n, k, $g(x)$.
- Codifica sistematica.
  - Alla k-pla da codificare si associa un polinomio $u(x)$ di grado n-1, i cui k coefficienti più significativi coincidono con i bit d'utente, mentre gli altri n-k bit sono posti a 0.
  - Si calcola il resto, $r(x)$, della divisione di $u(x)$ per $g(x)$. I coefficienti di $r(x)$ sono la ridondanza. La n-pla così ottenuta è associata a un polinomio $c(x)$, divisibile per $g(x)$.
- La sequenza ricevuta viene associata al polinomio $\hat{c}(x)$. Si effettua la divisione per $g(x)$.
- Se il resto (sindrome) è nullo si suppone che non ci siano stati errori.

Codici per la rivelazione d'errore

- Codici (concatenati) a parità singola (orizzontale + verticale)
  - La sequenza binaria viene organizzata in una matrice di N righe di k bit ciascuna (tipicamente k=8).
  - A ogni riga viene associato un bit di parità (i k+1 bit così ottenuti contengono un numero pari di bit '1'; parità orizzontale). Alle N righe viene associato un ulteriore riga di k+1 bit, tale che vi sia un numero pari di bit '1' in ciascuna colonna (parità verticale).
  - Questo schema che ha un tasso (efficienza)
    $$R_c = kN/\left[(k+1)(N+1)\right] \approx k/(k+1)$$
    (l'efficienza tipica è pari a circa 8/9) è in grado di rivelare tutti gli errori di peso dispari e gli errori di peso 2.
- Codici ciclici (*Cyclic Redundancy Check* - CRC)
  - Il polinomio generatore è del tipo $g(x)=(x+1)g'(x)$, dove $g'(x)$ è un polinomio di grado $m=n-k-1$ scelto in modo da essere un divisore di $x^{2^m-1}+1$ ma di non essere divisore di alcun polinomio del tipo x^h+1, con $h<2^m-1$.
  - Con tali scelte, il codice consente di rivelare tutti gli errori di peso dispari e tutti gli errori di peso 2 purché $n<2^m-1$. Da cui $R_c \leq (2^m-m-3)/(2^m-2)$.

Rivelazione d'errore: CRC

- Ridondanza determinata associando la sequenza d'informazione a un polinomio di grado k. La ridondanza è il resto della divisione per il polinomio $g(x)=(x+1)g'(x)$ di grado $n-k$.
- Rivela tutti gli errori di peso dispari e gli errori doppi.
- Vincoli: fissata la ridondanza $(n-k)$, $n<2^{n-k-1}-1$. Da cui $k<2^{n-k-1}-(n-k)-1$.
- Esempi:

n - k [bit]	polinomio generatore	n [bit]	k [bit]	$R_c=\frac{k}{n}$	Ente
5	$g(x)=x^5+x^3+x+1$	<15	<10	<2/3	ITU-T
8	$g(x)=x^8+x^7+x^3+x^2+1$	<127	<119	<119/127	ITU-T
16	$g(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$	<32767	<32751	≈1	
32	$g(x)=x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{16}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^7+x^5+x^4+x^2+x+1$	$<10^9$	$<10^9$	≈1	IEEE
64	$g(x)=x^{64}+x^4+x^3+x+1$	$<10^{18}$	$<10^{18}$	≈1	ISO

Codici per la correzione d'errore. I codici di Hamming

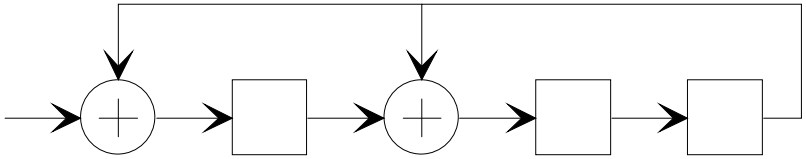
- Sono codici a verifica di parità, (possono essere ciclici).
- Parametri: $n=2^m-1$, $k=2^m-m-1$, $d_{min}=3$.
- Sono codici a elevato tasso, in grado di correggere errori singoli.
- La matrice di parità è composta da tutte le sequenze di lunghezza m, eccetto la sequenza nulla.
- Esempio, $m=3$, $n=7$, $k=4$, versione sistematica e ciclica: $g(x)=x^3+x+1$.

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

- In caso di errore singolo, la sindrome coincide con la colonna di **H** che corrisponde alla posizione dell'errore.
- Codici BCH: $n=2^m-1$, $n-k\le mt$, $d_{min}\ge 2t+1$

Codifica di un codice ciclico

- Si può effettuare utilizzando un registro a scorrimento:
  Esempio codice di Hamming (7,4) con generatore $g(x)=x^3+x+1$.



Contenuto azzerato; entrano i 4 bit di informazione; dopo il loro transito nel registro rimane il resto).

- In ricezione lo stesso dispositivo viene utilizzato per determinare la sindrome che, in caso di errore singolo, coincide con la colonna di **H** che corrisponde alla posizione dell'errore (codici di Hamming).

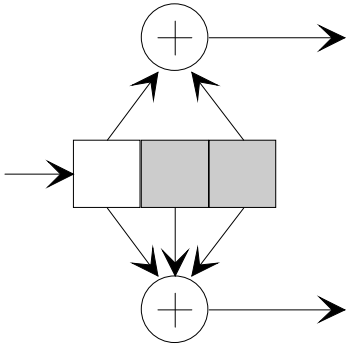
- Lo stesso dispositivo, senza ingresso e inizializzato con un contenuto diverso da 0, è utilizzato per generare le sequenze PN.

Generatori sequenze PN

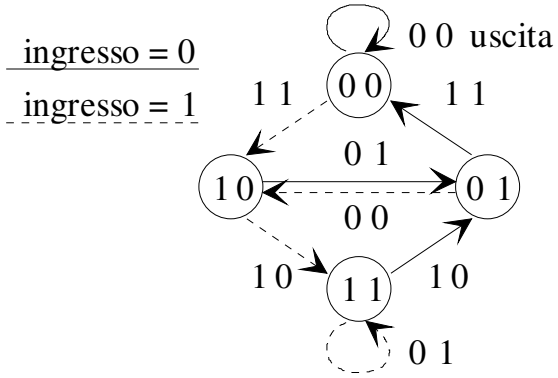
- Nella seguente tabella sono indicati in notazione ottale i generatori delle sequenze PN. Nella tabella $P=2^L-1$ indica il periodo della sequenza, L il numero di elementi presenti nel registro a scorrimento (corrispondenti al grado del polinomio generatore), e g (in notazione ottale), rappresenta i coefficienti del polinomio generatore, con l'esclusione del termine x^L (esempio g=[3]=011, con L=3, corrisponde al polinomio $g(x)=x^3+x+1$).

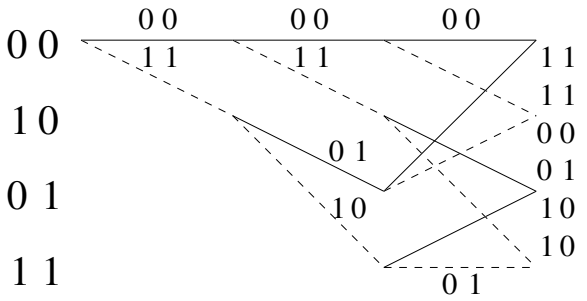
P	*L*	*g*
7	3	[3], [5]
15	4	[0 3], [1 1]
31	5	[0 5], [1 1]
63	6	[0 3], [4 1]
127	7	[0 1 1], [1 0 1]
255	8	[0 3 5], [1,6,1]
511	9	[0 4 1]
1023	10	[0 2 0 1]
2047	11	[1 0 0 1]
4095	12	[6 0 2 1]

Codici convoluzionali



- Esempio: Tasso R_c=1/2. Sono evidenziati i valori precedenti dell'ingresso che hanno influenza sul valore attuale dell'uscita (tali valori definiscono lo stato del sistema). Dicesi lunghezza di vincolo, L, la dimensione del registro (nell'esempio L=3). Le relazioni ingresso/uscita definiscono i generatori che vengono indicati in notazione ottale.
  Nell'esempio g1=(1 0 1) (si indica con 5), g2=(1 1 1) (si indica con 7).
- L'evoluzione si descrive mediante diagramma di stato o diagramma a traliccio. Decodificare equivale a identificare la sequenza a distanza minima sul traliccio (algoritmo di Viterbi).





Modulazione lineare (*hard decoding*)

- Si consideri una modulazione lineare a $M=2^n$ simboli
- La forma d'onda i-ma è descritta dal vettore $\mathbf{s}_i$. (mono o bi-dimensionale).
- Se trasmetto la forma d'onda j-ma, La forma d'onda ricevuta è rappresentata dal vettore $\mathbf{r}=\mathbf{s}_j+\boldsymbol{\nu}$, dove $\boldsymbol{\nu}$ è il termine di rumore.
- Lo spazio vettoriale N-dimensionale cui appartiene $\mathbf{r}$, viene suddiviso in M regioni, a 2 a 2 disgiunte, A_m (regioni di decisione o di Voronoi).

- Criterio MAP $\mathbf{r} \in A_m : m = \arg\max_j \left(f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j) p(\mathbf{s}_j) \right)$
- Criterio ML: $\mathbf{r} \in A_m : m = \arg\max_j \left(f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j) \right)$ (minima distanza)
- Probabilità di corretta decisione: $p_c = \sum_m p(\mathbf{r} \in A_m|\mathbf{s}_m) p(\mathbf{s}_m) = \sum_m p(\mathbf{s}_m) \int_{\mathbf{r} \in A_m} f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$
- Scelta binaria (MAP): $r \in A_0 : \Lambda = \log\left[\frac{f(r|s_1)}{f(r|s_0)}\right] > \log\left[\frac{p(s_0)}{p(s_1)}\right]$

  Λ è detto rapporto di verosimiglianza logaritmico (log-likelihood ratio).
- Se $p(s_0)=p(s_1)$, oppure se le due probabilità non sono note si adotta il criterio ML: $r \in A_0 : \Lambda > 0$.

Square root SNR *signal space*

- *Square root energy signal space*: $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_j) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{h=1}^{N} (r_h - s_{jh})^2 \right)$
- Cambiamento di variabile: $y_h = \frac{r_h}{\sqrt{N_0}} \quad x_{jh} = \frac{s_{jh}}{\sqrt{N_0}}$
- *Square root* SNR *signal space*: $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) = \frac{1}{(\pi)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{h=1}^{N} (y_h - x_{jh})^2 \right)$
- *Pairwise error probability*: $p_e = Q(d_t^y \sqrt{2})$ essendo d_t^y la distanza dalla soglia nel nuovo sistema di coordinate.
- *Log-Likelihood Ratio* modulazione binaria antipodale: $L = \log \frac{f(y|x_0)}{f(y|x_1)} = 4y\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}$

MAP in presenza di un codice

$$\log\frac{p(x_i=+|\mathbf{r})}{p(x_i=-|\mathbf{r})}=\log\frac{p(\mathbf{r}|x_i=+)p(x_i=+)}{p(\mathbf{r}|x_i=-)p(x_i=-)}=\log\frac{p(r_1,r_2,\ldots,r_n|x_i=+)p(x_i=+)}{p(r_1,r_2,\ldots,r_n|x_i=-)p(x_i=-)}=$$

$$=\log\frac{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=+)p(r_i,|x_i=+)p(x_i=+)}{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=-)p(r_i,|x_i=-)p(x_i=-)}$$

$$=\log\frac{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=+)}{p(r_1,r_2,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n|x_i=-)}$$ Codice

$$+\log\frac{p(r_i,|x_i=+)}{p(r_i,|x_i=-)}$$ Canale

$$+\log\frac{p(x_i=+)}{p(x_i=-)}$$ A priori

Codici di parità: matematica delle APP

- $$L = \log\frac{p_+}{p_-} = \log\frac{p_+}{1-p_+} \qquad p_+ = \frac{\exp(L)}{1+\exp(L)}$$

Consideriamo una coppia di bit (antipodali), u_1, u_2. $u_1 \bullet u_2 = +$ se $u_1 = u_2$.

$$p_+(u_1u_2) = p(u_1^+)p(u_2^+) + (1-p(u_1^+))(1-p(u_2^+)) = 1 - p(u_1^+) - p(u_2^+) + 2p(u_1^+)p(u_2^+)$$

$$p_-(u_1u_2) = p(u_1^+) + p(u_2^+) - 2p(u_1^+)p(u_2^+)$$

Sostituendo, dopo alcuni passaggi si ottiene

$$p_+(u_1u_2) = \frac{1+\exp(L(u_1))\exp(L(u_2))}{(1+\exp(L(u_1)))(1+\exp(L(u_2)))}$$

$$p_-(u_1u_2) = \frac{\exp(L(u_1))+\exp(L(u_2))}{(1+\exp(L(u_1)))(1+\exp(L(u_2)))}$$

$$L(u_1u_2) = \log\left[\frac{1+\exp(L(u_1))\exp(L(u_2))}{\exp(L(u_1))+\exp(L(u_2))}\right]$$

Matematica delle APP

- Generalizzando (si dimostra per induzione, partendo da J=2)

$$L(u_1 u_2 \ldots u_J) = \log\left[\frac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))+1\right)+\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))-1\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))+1\right)-\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))-1\right)}\right]$$

Detto $$x = \frac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))-1\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j))+1\right)} = \frac{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j)/2)-\exp(-L(u_j)/2)\right)}{\prod_{j=1}^{J}\left(\exp(L(u_j)/2)-\exp(-L(u_j)/2)\right)} = \prod_{j=1}^{J}\tanh(L(u_j)/2)$$

Si ottiene: $$L(u_1 u_2 \ldots u_J) = \log\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

da cui $$x = \frac{\exp(L(u_1 u_2 \ldots u_J))-1}{\exp(L(u_1 u_2 \ldots u_J))+1} = \tanh(L(u_1 u_2 \ldots u_J)/2)$$

Sostituendo: $$L(u_1 u_2 \ldots u_J) = 2\,\mathrm{arctanh}(x) = 2\,\mathrm{arctanh}\left(\prod_{j=1}^{J}\tanh\left(L(u_j)/2\right)\right)$$

Single parity check (SPC)

- Si consideri un codice a verifica di parità (una parola di codice, **c**, è costituita da *K* bit di informazione e 1 bit di ridondanza tale che il numero di bit di valore 1 nella parola è in numero pari).
- Si consideri la versione binaria antipodale **d**=1-2**c**. Nella parola **d**, i valori pari a '-1' sono in numero pari. Pertanto valgono le relazioni: $\prod_{k=1}^{K+1} d_k = 1, \quad d_k = \prod_{h=1, h\neq k}^{K+1} d_h$
- Di conseguenza la stima soft del valore *k*-mo derivante dalla stima degli altri valori (contributo del codice alla stima complessiva) si ottiene con la relazione determinata in precedenza (stima soft di un prodotto).
- Se si organizzano i dati una matrice bidimensionale, con *R* righe e *C* colonne, e si aggiunge una riga di parità verticale e una colonna di parità orizzontale, si ottiene un codice prodotto in cui ogni bit può essere sottoposto a una doppia stima soft (di riga e di colonna), consentendo una decodifica iterativa. $R_c = \frac{RC}{(R+1)(C+1)}$
- Sono possibili configurazioni più complesse, per ottenere prestazioni migliori e tassi di codifica opportuni. (F. Babich, "Design of Adaptive Systems for the Fading Channel Adopting Efficient Coded Modulations", IEEE ICC 2006, Istanbul, Turkey, 11-15 June 2006.)

Probabilità d'errore di blocco (o di parola - *word error probability*); errori indipendenti.

- Decodifica mediante decisione morbida (*soft decision decoding*). Introduciamo il concetto di distanza euclidea fra due parole di codice *i,j*, d_{ij}^{E} , mentre la distanza di Hamming sia $d_{ij}^{H} \geq d_{\min}$ -

- Modulazione binaria antipodale: $\left(d_{ij}^{E}\right)^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k:c_{ik} \neq c_{jk}}}^{n} \left(\pm 2\sqrt{E_g}\right)^2 = 4E_g d_{ij}^{H}$

- In generale, la probabilità d'errore fra due parole è: $P_{e_{ij}} = Q\left(d/\sqrt{2N_0}\right)$

- Pertanto, applicato lo *union bound* e introdotto il tasso del codice $R_c=k/n$ (E_b = energia dei bit di sorgente) otteniamo:

  modulazione binaria antipodale: $P_W \leq \left(2^k - 1\right) Q\left(\sqrt{2R_c d_{\min} E_b / N_0}\right)$