Limiti: definizione di limite e primi esempi
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

1. Verificare i seguenti limiti usando la definizione:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} log(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1} x - 2\sqrt{x} = -1$$

2. Dire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + cos(x)) \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} cos(x)$$

3. Dire per quali valori del parametro α la funzione seguente risulta continua nel suo dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor + \alpha & x < 0 \end{cases}$$

4. Dire per quali valori del parametro a la funzione seguente risulta continua nel suo dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)} & x > 0 \\ a2^x + 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

(usare il limite dato nell'esercizio 6)

9. Calcolare i seguenti limiti (per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \qquad \lim_{x \to 1} (\frac{x+1}{x-1})^2$$

(per il terzo si può per esempio usare il teorema sul limite della composizione di due funzioni, di cui una continua)

10. Calcolare i seguenti limiti (per $x \to \infty$):

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{cos(x)}{x}) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x2 - 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 9}{7x^2 - x + 12} \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

11. Sfruttando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

caalcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{sen(4x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{sen(x^4)}{sen^2(x^2)} \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{sin(x)}{x-\pi}$$

Sketch della dimostrazione del limite indicato nell'ultimo esercizio: Si può dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

osservando dalla rappresentazione di x, sin(x) e tg(x) sulla circonferenza trigonometrica, che

$$sin(x) < x < tg(x) \qquad 0 < x < \pi/2$$

(dall'area dei triangoli di altezza sin(x) e tg(x) e dall'area della corona circolare). Quindi dividendo per sin(x) e considerando l'inversa della disuguaglianza, nella quale saranno quindi invertiti i versi si ha:

$$cos(x) < \frac{sin(x)}{x} < 1 \qquad 0 < x < \pi/2$$

Dal teorema del confronto infine si ha che, siccome cos(x) tende ad 1 quando x tende a 0, essendo una funzione continua, anche $\frac{sin(x)}{x} \to 1$ quando $x \to 0$.
(Si veda "Enrico Giusti, Analisi matematica 1" per i dettagli di questa dimostrazione)

Riferimenti online:
`http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi1/pdf/limiti-svolti.pdf`
`http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi1/pdf/cont-deriv-svolti.pdf`