Esercizio 1. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$u'' - u' = 0 \quad (1)$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$$

Osserviamo che:

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 + C_2 e^t$$

Esercizio 2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u''' + 3u'' + 3u' + u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

Osserviamo che:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$$

Le cui radici sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t$$

Esercizio 3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u''' + 4u'' + 4u' + u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

Osserviamo che:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)[\lambda^2 + 3\lambda + 1]$$

Le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t}$$

Esercizio 4. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u^{(4)} - 2u''' + 2u'' - 2u' + u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 - 2\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} &= 0 \\ \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) &= 0\end{aligned}$$

Le cui radici sono:

$$\begin{aligned}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \quad \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 2 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \quad \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 2 \\ \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1\end{aligned}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3 e^t + C_4 t e^t$$

Esercizio 5. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u^{(6)} + 8u^{(4)} + 16u'' = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^2$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) &= 0\end{aligned}$$

Le cui radici (che si trovano mediante la sostituzione $\lambda^2 = t$ e risolvendo per t e poi per λ) sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 2i \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -2i$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \sin(2t) + C_4 \cos(2t) + C_5 t \sin(2t) + C_6 t \cos(2t)$$

Esercizio 6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u'' - 4u' + 5u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2 + i \quad \lambda_2 = 2 - i$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 e^{2t} \sin(t) + C_2 e^{2t} \cos(t)$$

Esercizio 7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u^{(4)} + u'' - 20u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 - 20$$

Le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -i\sqrt{5} \quad \lambda_4 = i\sqrt{5}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$u(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin(\sqrt{5}t) + C_4 \cos(\sqrt{5}t)$$

Esercizio 8. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u^8 - u = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico associato è:

$$P(\lambda) = \lambda^8 - 1$$

Ponendo $\lambda^2 = t$ si ha:

$$\lambda^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 = 1$$

Le cui radici sono:

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -1 \quad t_3 = i \quad t_4 = -i$$

dalle prime due ritornando alla variabile λ troviamo:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = i \quad \lambda_4 = -i.$$

Restano da risolvere le ultime due equazioni: $\lambda^2 = i$ e $\lambda^2 = -i$. Osserviamo preliminarmente che se $\bar{\lambda}$ è soluzione di $\lambda^2 = i$ allora $i\bar{\lambda}$ è soluzione di $\lambda^2 = -i$ dato che $(i\bar{\lambda})^2 = -\bar{\lambda}^2 = -i$. Cerchiamo allora $t, u \in \mathbb{R}$ tali che $z = t + iu$ sia soluzione dell'equazione $\lambda^2 = i$. Sostituendo nell'equazione da risolvere otteniamo:

$$(t + iu)^2 = i \Leftrightarrow t^2 + 2tui - u^2 = i$$

e quindi uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri si trova il seguente sistema (di cui ci interessano solo le soluzioni reali).

$$\begin{cases} t^2 - u^2 = 0 \\ 2tu = 1 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} t^2 = u^2 \\ u = \frac{1}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{1}{4t^2} \\ u = \frac{1}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 = \frac{1}{4} \\ u = \frac{1}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Le due soluzioni dell'equazione $x^2 = i$ sono pertanto:

$$\lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \lambda_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$$

Quindi le due soluzioni dell'equazione $x^2 = -i$ sono:

$$\lambda_7 = i\lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \quad \lambda_8 = i\lambda_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

Osserviamo che λ_5 e λ_8 , λ_6 e λ_7 sono a coppie complesse coniugate. La soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$\begin{aligned} u(t) = & C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t) \\ & + C_5 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + C_6 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \\ & + C_7 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + C_8 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \end{aligned}$$

Lemma 1. La soluzione dell'equazione reciproca di quarto grado della forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ si può ricondurre alla soluzione di due equazioni di secondo grado.

Dimostrazione. Osserviamo che essendo $a \neq 0$ (l'equazione è di quarto grado), 0 non è soluzione dell'equazione data e pertanto possiamo dividere per x^2 trovando:

$$\begin{aligned} 0 = ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} &= ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} + 2a - 2a = \\ a\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a &= \\ a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a & \end{aligned}$$

Tramite la sostituzione $t = \left(x + \frac{1}{x}\right)$ l'equazione diviene:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0$$

che risolta darà due soluzioni t_1 e t_2 ; per trovare le quattro soluzioni dell'equazione proposta sarà sufficiente risolvere per x le due equazioni

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = t_1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = xt_1$$

e

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = t_2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = xt_2.$$

□