

T. f. del C.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $x_0 \in I$ $F_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$ $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Allora F_{x_0} è
derivabile con $F'_{x_0}(x) = f(x)$.

Dim sia $\hat{x} \in I$

$$F'_{x_0}(\hat{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F_{x_0}(\hat{x}+h) - F_{x_0}(\hat{x})] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^{\hat{x}+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{\hat{x}} f(t) dt \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \int_{\hat{x}}^{\hat{x}+h} f(t) dt \right] = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(\hat{x})$$

f continua! Per il teorema dello medio esiste un punto ξ_h

appartenente all'intervallo di estremi $\hat{x}$ e $\hat{x}+h$ $\left(\begin{array}{cc} [\hat{x}, \hat{x}+h] & [\hat{x}+h, \hat{x}] \\ h > 0 \nearrow & h < 0 \searrow \end{array} \right)$

tale che $\boxed{} = f(\xi_h)$

OSS Se f è continuo ogni funzione integrale $\bar{F}_{x_0}$ è una primitiva di f .

Se f è definito su un intervallo e F, G sono due primitive di f ,
sappiamo che $F - G$ è costante $\left[(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0 \right]$

Sia f ^{definito su un intervallo} continua

$x_0 \in]$ $\bar{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ Sia $G(x)$ una primitiva di f ;

$\bar{F}_{x_0}$ è una primitiva $\Rightarrow \bar{F}_{x_0} - G = C$ costante; quindi

$$G(x) = \bar{F}_{x_0}(x) - C = \int_{x_0}^x f(t) dt - C \quad G(x_0) = -C \Rightarrow C = -G(x_0)$$

Supponiamo di conoscere una primitiva F di f funzione su $[a, b]$
 cioè $F'(x) = f(x) \quad \forall x$. Sappiamo che $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva
 di f ; quindi $F(x) = F_a(x) - C$ $C = -F(a)$

$$= \int_a^x f(t) dt - C$$

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt - C$$

Quindi
$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

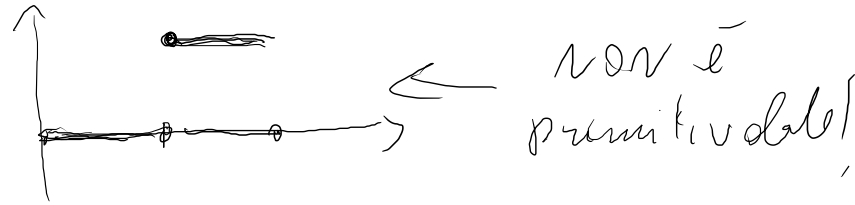
Formula di Torricelli-Barrow

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, Sia G un primitivo di f .

Allora
$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Esempio di funzione integrabile non primitivabile

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 2] - \{1\} \end{cases}$$



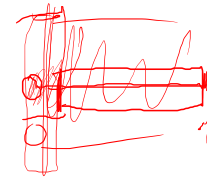
Esempio di funzione primitivabile non continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ f non è continua

$$f(x) = F'(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-2x^{-3}\right) & \\ \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è primitivabile

ma NON è integrabile perché è illimitata

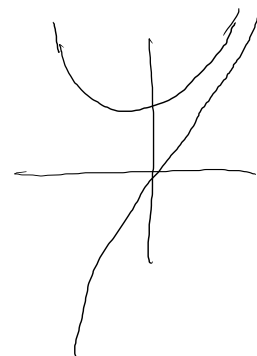
$$\cosh(1)$$

$$\text{error} \leq \frac{1}{10^4}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + E(x)$$

$$x_0 = 0$$

$$(n+1)! > 2 \cdot 10000$$



$$|E(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

$$|\xi - x_0| < |x - x_0|$$

$$= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \leq \frac{\cosh \xi}{(n+1)!} \leq \frac{\cosh 1}{(n+1)!} \leq \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{10^4}$$

$$\cosh 1 = \frac{1}{2} (e + e^{-1}) \leq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$(n+1)! > \frac{7}{4} \cdot 10^4$$

$$(n+1)! > 2 \cdot 10^4$$

$$(n+1)! > 2 \cdot 10'000$$

$$n = 7$$

$$(n+1)! = 40320 > 20000$$

$$\cosh 1 \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!}$$

$$720$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{720} \approx \frac{720 + 360 + \dots + 1}{720}$$

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
8	40320

~~600~~

$$f(x) = x^4 - \frac{3}{10}x^5 - x^3 = x^3 \left(-\frac{3}{10}x^2 + x - 1 \right)$$

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 = \underline{x^2} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x - 3 \right)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x^3 - 6x$$

$$3x^2 - 8x + 6$$

$$= 6x (-x^2 + 2x - 1)$$

~~$$4 \pm \sqrt{16 - 12}$$~~

$$-6x (x^2 - 2x + 1) = \underline{-6x (x-1)^2}$$

$$f''(0) = 0$$

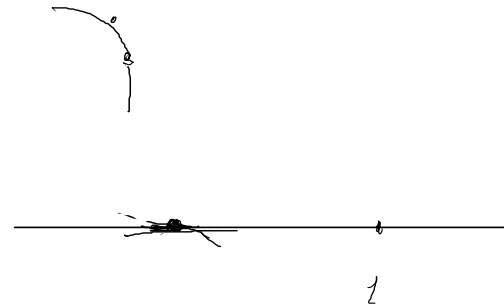
1

$$f''(1) = 0$$

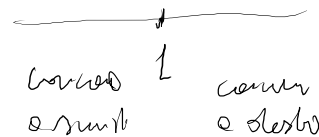
1

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < 0$$

$$\boxed{f''(x) < 0} \text{ se } x > 0 \text{ e } x \neq 1$$



0 punto di flesso
discontinuo!

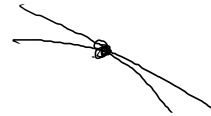


f è convessa su $]-\infty, 0]$

f è concava su $[0, +\infty[$ $f''(x) \leq 0$ su $[0, +\infty[$

in particolare lo tangente sta sopra al grafico di f

quindi 1 non è un punto di flesso



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[\frac{1}{x} \log \left(\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right) \right] = 1$$

$$\frac{\log \left(\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right)}{\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right)}$$

$$\frac{\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right)}{\frac{x^2}{x+1}}$$

$$\left[\begin{array}{cc} x^2 & 1 \\ x+1 & x \end{array} \right] \rightarrow 0$$

$$\frac{\log 4}{4} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

lim

$x \rightarrow +\infty$

$$\left(\text{orig } (x+1) - \text{orig } (x) \right)$$

$\frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^2}$$

lim

$x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

lim
 $x \rightarrow +\infty$

$$= -\frac{1}{2}$$

x^3

$$-\frac{3}{x^3}$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x} - 2x - 1$$

$$\frac{\cancel{x} + \cancel{x^2} - 1 - (x+1)^2}{[1+(x+1)^2] (1+x^2)}$$

$\rightarrow 1$

= lim

$x \rightarrow +\infty$

$$-\frac{1}{2}$$

x^3

$$-2x - 1$$

$$x^4 \left[\frac{1}{x^2} + \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)$$

=

lim

$x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)}{\cancel{x^4} [\quad] (\quad)}$$

= 1

ESAME 10 SETT 2018

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 7}$$

si determini gli asintoti
obliqui a $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 7} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1 \quad m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x - 7} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 7 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x - 7} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{7}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad q = 2 \quad y = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} + \infty}{x} = -1 \quad m = -1$$

$$\Rightarrow y = -x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x - 1} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

$$\frac{x^2 + 4x - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 - \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = -\frac{4}{2} = -2 \quad q = -2$$

$$2) f(x) = \left\{ \right.$$

③ $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^4 \sin x}}{2^{x^2} - 1} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

verificare di continuità in zero

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^a - 1}{y} = a$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^4 \sin x}}{2^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \sqrt[3]{1 - 3x \sin x} \right)}{2^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{-x}_{\downarrow 0} \frac{\underbrace{(1 - 3x \sin x)^{1/3} - 1}_{\downarrow 1/3}}{\underbrace{-3x \sin x}_{\downarrow -3}} \cdot \frac{\underbrace{-3x \sin x}_{\downarrow -3}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\underbrace{2^{x^2} - 1}_{\downarrow 1}}$$

$= 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} (1 - 3x \sin x)^{1/3} - 1}{\cancel{x} 2^{x^2} - 1}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)\left(\frac{1}{\log 2}\right) = \frac{1}{\log 2}$$

ESAME 28/06/2021 ES 2

$$f(x) = \frac{1 + (x+1)^2}{1+x^2}$$

① asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (x+1)^2}{1+x^2} = 1 \quad \Rightarrow y = 1 \text{ asintoto orizz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

f limitata: fisso $\varepsilon = 1$

dalla def. di limite $\exists K > 0$ t.c. $|f(x) - 1| < 1$ se $|x| > K$

ovvero: $0 < f(x) < 2$

Inoltre $f: [-K, K] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su un compatto

$\Rightarrow$ per il teor. di Weierstrass ha max e min

Perciò f limitata su tutto $\mathbb{R}$.

$$2) f'(x) = \frac{2(x+1)(1+x^2) - [1+(x+1)^2] \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3+2+2x^2 - (x^2+2x+2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 2x^2 + 2x + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 - 4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2(x^2+x-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$3) f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-2(x^2+x-1)}{(1+x^2)^2} = 0 \quad x^2+x-1=0 \quad x_{f2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{matrix} \nearrow & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & (x_1) \\ \searrow & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & (x_2) \end{matrix}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$> 0 \rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

f crescente su $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$

f decrescente su $\left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right]$ e su $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$

$$f(x_1) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = \min f$$

$$f(x_2) = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$\Rightarrow f(x_2) = \max f$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \stackrel{?}{<} 1$$

$$3-\sqrt{5} \stackrel{?}{<} 2$$

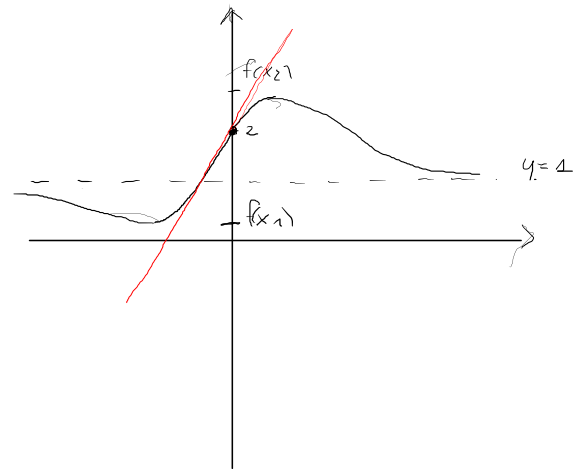
$$1 < \sqrt{5} \quad \underline{\text{SI}}$$

4) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determ. soluzioni di $f(x) = \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > f(x_2) \\ \alpha < f(x_1) \end{array} \right\} \rightarrow 0 \text{ soluzioni}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = f(x_1) \\ \alpha = f(x_2) \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \rightarrow 1 \text{ soluzione}$$

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2) \rightarrow 2 \text{ soluzioni}$$



5) $P(0,2)$ retta tangente grafico di f in P

$$m = f'(x_0) = 2$$

$$f(x_0) = 2$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Rightarrow y = 2x + 2$$

intersezioni :

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = \frac{1 + (x+1)^2}{1+x^2} \end{cases}$$

$$2x + 2 = \frac{1 + (x+1)^2}{1+x^2}$$

$$2(x+1)(1+x^2) - 1 - (1+x)^2 = 0$$

$$(x+1)[(2+2x^2) - (1+x)] - 1 = 0$$

$$(x+1)(1-x+2x^2) - 1 = 0$$

$$\cancel{x} - \cancel{x^2} + 2x^3 + \cancel{1} - \cancel{x} + 2x^2 - \cancel{1} = 0$$

$$2x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(2x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x=0 \rightarrow y=2$$

$$\quad \quad \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 1$$

$\Rightarrow$ punti di intersezione : $(0,2)$ e $(-\frac{1}{2}, 1)$

ESAME 6 SETTEMBRE 2021

sia $f \in C^3(\mathbb{R})$ una funzione $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

poniamo $g(x) = \log(f(x)) + x$ g infinitesima in 0 $\text{ord}_0(x) > 2$

1) $g'(x)$ e $g''(x)$ in funzione di $f(x)$ e $f'(x)$

$g \rightarrow$ derivabile in tutto $\mathbb{R}$ perché somma e composizione di funz. derivab.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + 1$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$$

2) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e polinomio Taylor - MacLaurin ordine 2

g infinitesima in 0 e continua

$$g(0) = 0 = \log(f(0)) + 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

sappiamo che $\text{ord}_0 g(x) \geq 2$

per il lemma di Peano almeno $g'(0) = g''(0) = 0$

$$g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} + 1 = 0 \iff f'(0) = -f(0) \quad f'(0) = -1$$

$$g''(0) = \frac{f''(0)f(0) - (f'(0))^2}{(f(0))^2} = 0 \iff f''(0) = (f'(0))^2 \quad f''(0) = 1$$

polinomio di Taylor

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = 1 - x + \frac{1}{2} x^2$$

3) mostrare perché $f(x)$ è localm invertibile in $x_0 = 0$ e approssimante lin di $f^{-1}(y)$ con $y_0 = f(x_0)$

$f'(x)$ continua su $\mathbb{R}$ e $f'(0) = -1$

per la perman del segno $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\forall x \in B(0, \delta) \quad f'(x) < 0$

Quindi $f|_{B(0, \delta)}$ e' decrescente (stretto) $\rightarrow$ iniettiva

suriettiva $\rightarrow f(B(0, \delta)) \subseteq \mathbb{R}$

quindi $\underline{f} : B(0, \delta) \rightarrow f(B(0, \delta))$ e' biettiva $\rightarrow$ invertibile

approssimante lineare

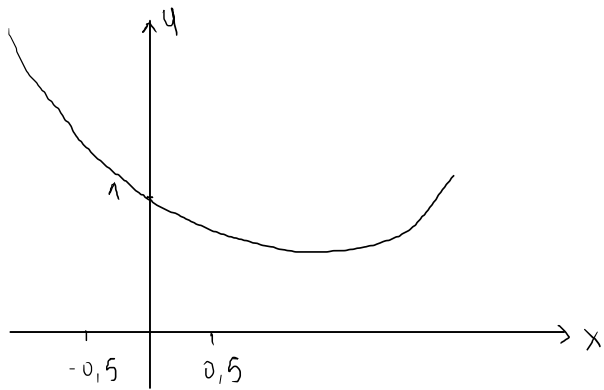
essendo $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1 \neq 0$

$\underline{f}^{-1}$ e' derivabile in $y_0 = f(0) = 1$ e $(\underline{f}^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$

$$\underline{f}^{-1}(y) = (\underline{f}^{-1})'(1)(y-1) + \underline{f}^{-1}(1) = -y + 1$$

$$x = -y + 1$$

$$y = -x + 1$$



Esempio di funzione primitivabile non integrabile