1

Si consideri la funzione su $[-T, T]$ definita da

$$f(t) = \begin{cases} t + T \ , & -T \leq t < 0 \\ t - T \ , & 0 \leq t \leq T \ . \end{cases}$$

Si applichi l'identità di Parseval alla serie di Fourier per questa funzione per mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

2

Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{\theta(|t| - 1)}{t} \ ,$$

dove t è la funzione theta di Heaviside.

- Si deduca dalle proprietà della funzione $f(t)$ che la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ che non è in $L^1(\mathbb{R})$, senza calcolare $\hat{f}$.

- Si mostri che

  $$\hat{f}(\omega) = \pi i \, \mathrm{sign}(\omega) - 2i \, \mathrm{Si}(\omega) \ ,$$

  dove $\mathrm{Si}(x)$ indica la funzione speciale *seno integrale* definita da

  $$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x dy \, \frac{\sin y}{y} \ ,$$

  e $\mathrm{sign}(\omega)$ è il segno di ω.

- Si calcoli l'integrale

  $$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, (\pi \, \mathrm{sign}(\omega) - 2 \, \mathrm{Si}(\omega))^2 \ .$$