ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 6

Trieste, 28 novembre 2021

1. (Dal Tema d'esame del 25/1/2021)
   Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da
   $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + x_3).$$
   (1) Verificare che f è lineare, determinare il rango di f, una base del nucleo e una base dell'immagine.
   (2) Dopo aver osservato che i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e che $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 0)$ formano una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f)$.

2. (Dal Tema d'esame del 9/2/2021)
   Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ e t_1, t_2, t_3 di $\mathbb{R}^2$:
   $$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1),$$
   $$t_1 = (2, -1), t_2 = (1, 1), t_3 = (3, 1).$$
   (a) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_i) = t_i$, per ogni $i = 1, 2, 3$, e scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.
   (b) Trovare $\operatorname{rg} f$, una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{Im} f$.
   (c) Determinare una base per $\mathbb{R}^3$ e una base per $\mathbb{R}^2$ rispetto alle quali la matrice di f è
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Siano V, W K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
   Dimostrare che, se f è iniettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$, mentre se f è suriettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = id_W$. (Suggerimento: usare i teoremi di completamento a una base e di determinazione di un'applicazione lineare.)

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la sua base $(1, x, x^2, x^3)$.
   (1) Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da $T(p(x)) = p'(x)(x - 1)$, dove p' denota la derivata di p. Verificare che T è lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio;
   (2) descrivere $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ e calcolare le loro dimensioni;
   (3) verificare che $V = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.