

Macchine sincrone

Rispetto alla macchina asincrona, la macchina sincrona, in condizioni di regime, funziona con scorrimento nullo. In altre parole, il rotore ruota in modo sincrono con il campo rotante (da cui il nome di macchina sincrona)

Come per la macchina asincrona, la coppia e quindi il trasferimento di potenza all'asse si genera se statore e rotore generano un campo magnetico al traferro caratterizzato dallo stesso numero di poli e dalla stessa velocità di rotazione (v. parte su campo rotante).

Nella macchina asincrona, il campo prodotto dal rotore è dovuto alle correnti indotte nelle barre o nelle fasi dell'avvolgimento rotorico (motivo per cui si parla anche di macchina «ad induzione»).

Nel caso di macchina sincrona, il campo magnetico prodotto dal rotore può essere ottenuto:

- Mediante un circuito elettrico montato avvolto sul rotore, alimentato in corrente continua
- Mediante magneti permanenti installati sulla superficie del rotore o al suo interno con polarità alternate.

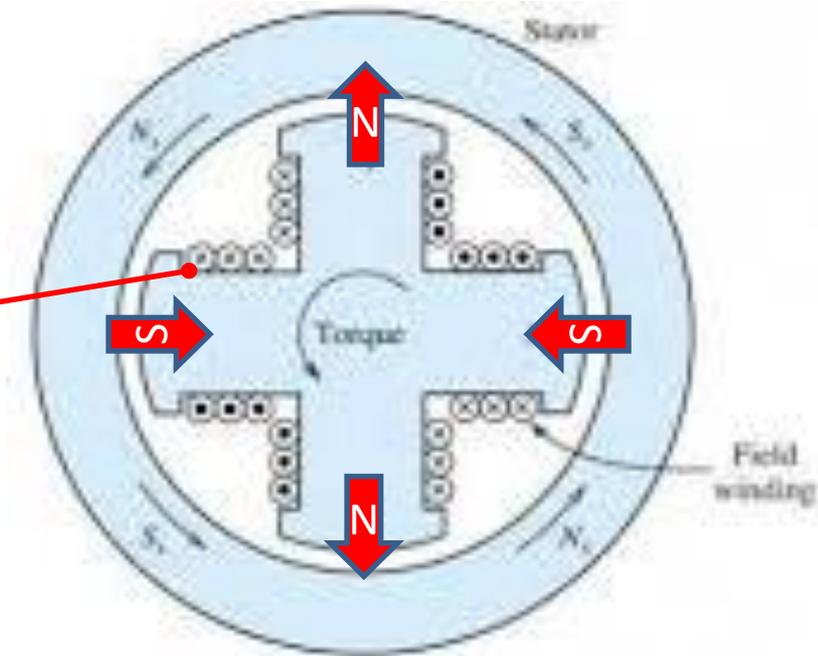
Esempio di rotore avvolto (alimentato elettricamente) per macchina sincrona a 4 poli



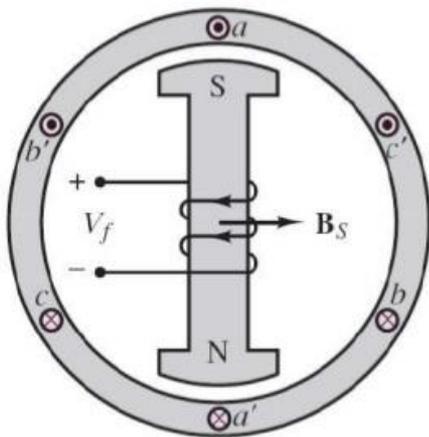
Il circuito, montato sul rotore e alimentato in corrente continua, che serve a generare il campo di rotore si chiama «avvolgimento o circuito di campo» o «avvolgimento o circuito di eccitazione»

Spire dell'avvolgimento di campo o di eccitazione

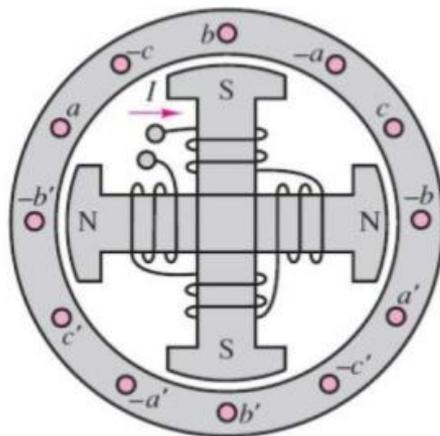
Il circuito di eccitazione è costituito da molte spire connesse in serie e avvolte attorno ai poli con verso opportuno, cioè in modo da creare un campo magnetico con polarità alternate (N, S, N, S, ...)



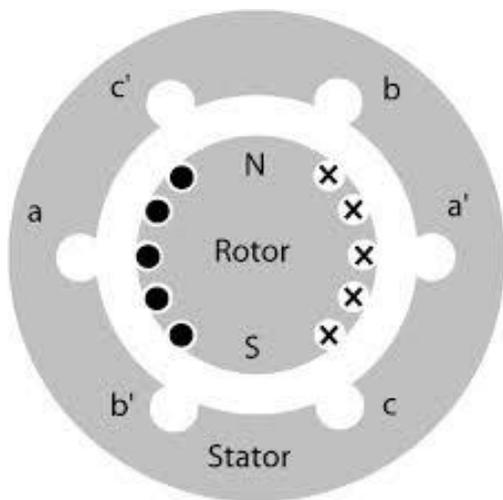
Rotore a due poli



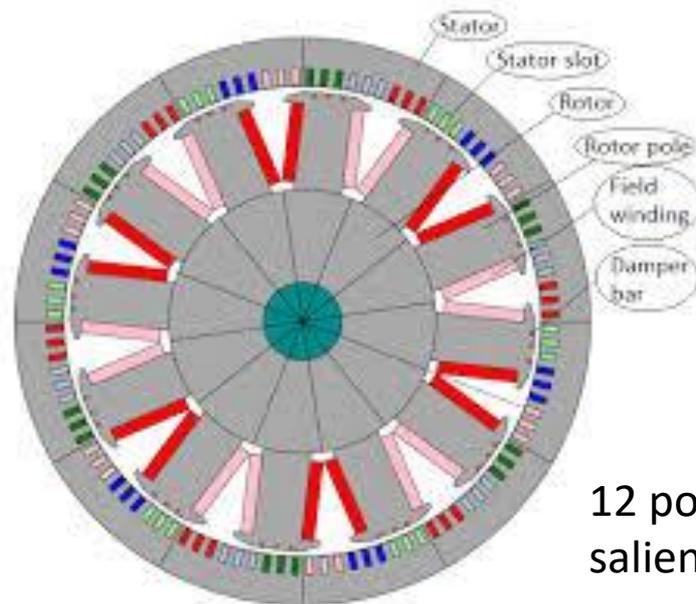
Rotore a quattro poli



Rappresentazione schematica di macchine a due e quattro poli salienti



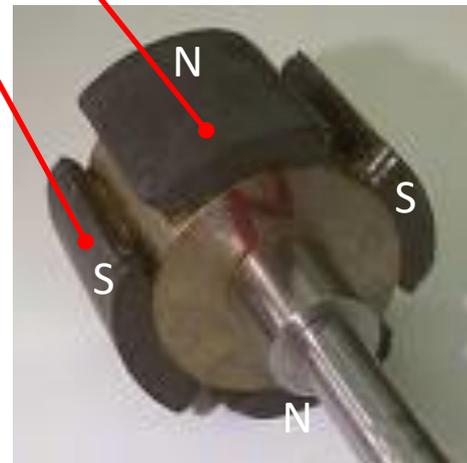
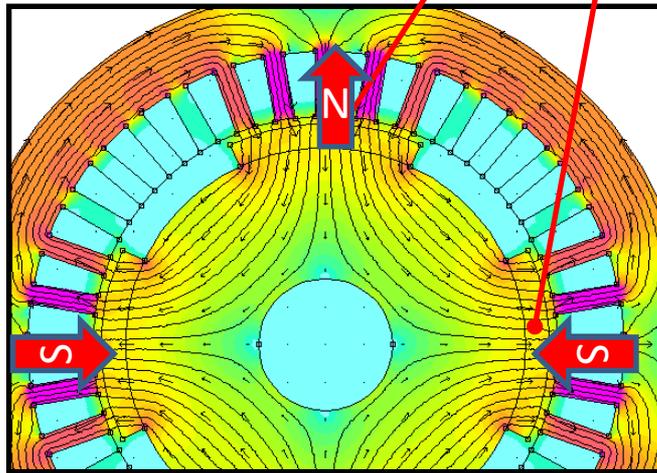
Rappresentazione schematica di macchina sincrona a due poli lisci



12 poli salienti

Esempio di rotore a magneti permanenti per macchina sincrona a 4 poli

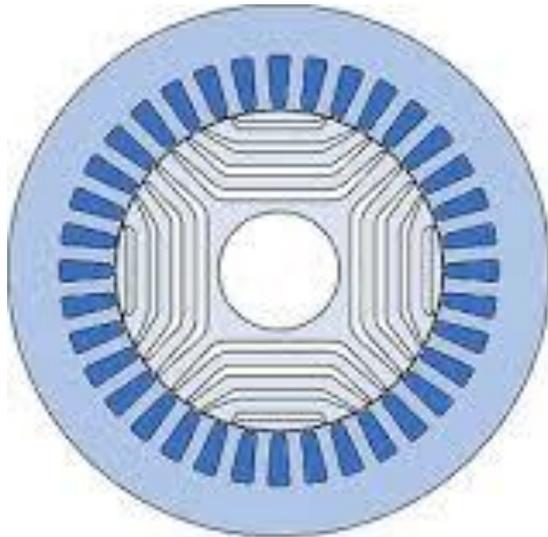
Magneti permanenti



Vi sono poi macchine sincrone, dette «a riluttanza», che non hanno sul rotore nè circuiti elettrici di eccitazione nè magneti permanenti.

Essi sono caratterizzati dalla presenza di «barriere di flusso», cioè scanalature del nucleo ferromagnetico che conferiscono al rotore una cosiddetta «anisotropia magnetica». Si vedrà che queste macchine non funzionano in virtù dell'interazione tra un campo di statore e un campo di rotore (quest'ultimo è nullo), ma in virtù dell'equazione che definisce la coppia come derivata dell'energia magnetica rispetto alla posizione del rotore a correnti di statore costanti (v. parte su campo magnetico rotante).

Esempio di macchina sincrona a riluttanza a quattro poli



Cenni costruttivi

Esternamente non differiscono dalle macchine asincrone
(carcassa, scudi, morsettiera, cuscinetti, albero....)



L'unica eccezione è che, nel caso di generatori con rotore avvolto ed eccitato elettricamente, la morsettiera non contiene solo i 3 terminali dell'avvolgimento (trifase) di statore ma anche i terminali del circuito di alimentazione del campo.

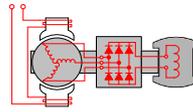


Rotore di macchine sincrone

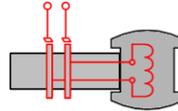
Campo di rotore prodotto da circuito elettrico in c.c. (eccitazione)

rotore avvolto

brushless



ad anelli



Non ci sono circuiti elettrici nè magneti sul rotore

a riluttanza

a poli salienti

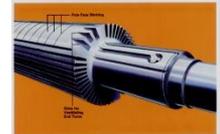


isotropo

laminato



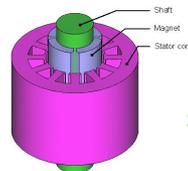
massiccio



Magneti permanenti sul o nel rotore

a magneti permanenti

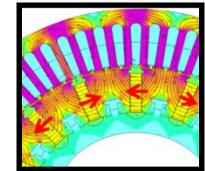
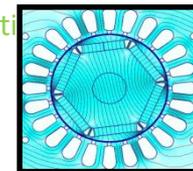
SPM



Magneti permanenti superficiali

Magneti permanenti interni

IPM



.....

a riluttanza assistita



Rotore con barriere di flusso e magneti permanenti

(verie morfologie)

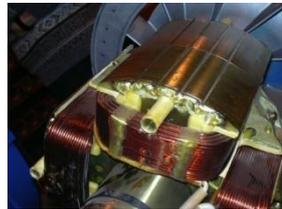
Macchine sincrone con rotore avvolto (eccitate elettricamente): Soluzione con rotore «a poli salienti»

Es. sincro ad anelli, 2 poli: 20 kVA, 3000 rpm



Es. sincro brushless, 4 poli: 50 kVA, 1500 rpm

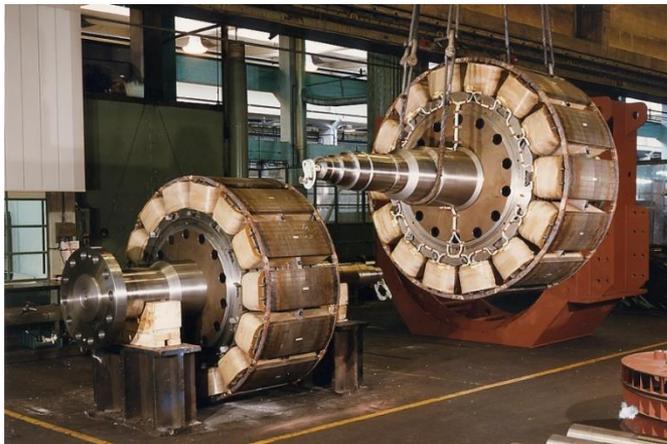
Rotore
principale



Piccoli sincroni
(decine di kVA), sia
lenti che veloci

Usati prevalentemente
come generatori (ad
esempio per gruppi
elettrogeni)

Es. rotore a 14 poli (laminati)



Grandi sincroni

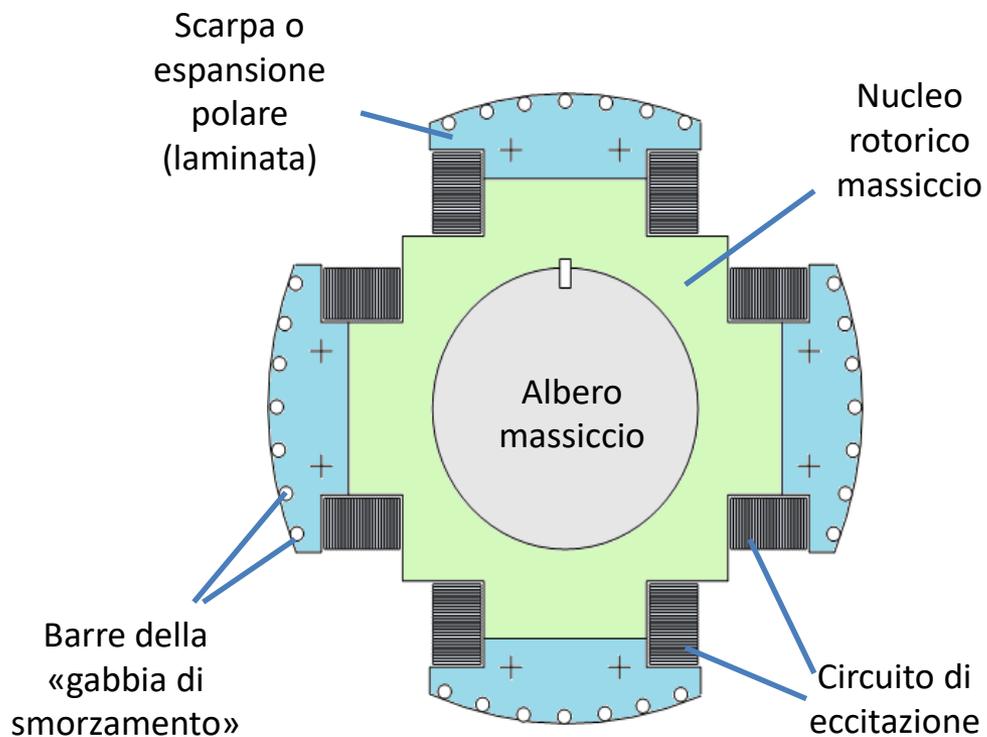
Usati sia come
motori che come
generatori

Come **generatori di grossa taglia «lenti»** (sotto i 1500 giri/min):

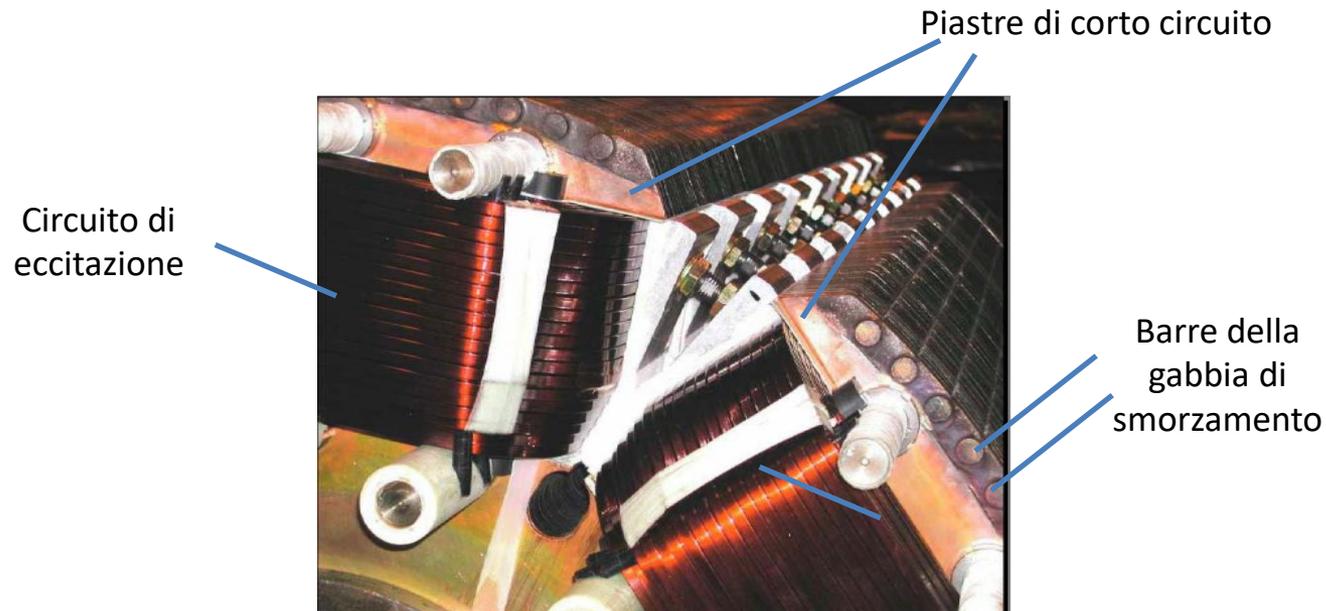
- Alternatori per centrali idroelettriche
- Alternatori per uso a bordo nave (accoppiati a motori a combustione interna)
- ...

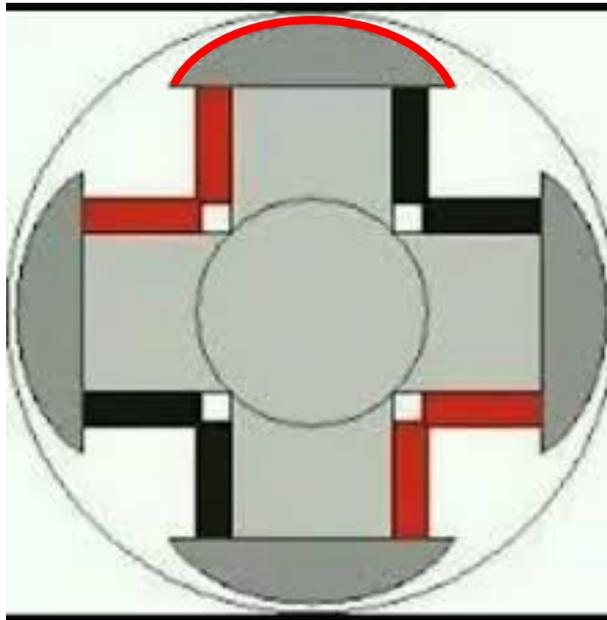
Come **motori di grossa taglia «lenti»** (sotto i 1500 giri/min):

- Propulsione navale
- Gabbie di laminazione
- ...



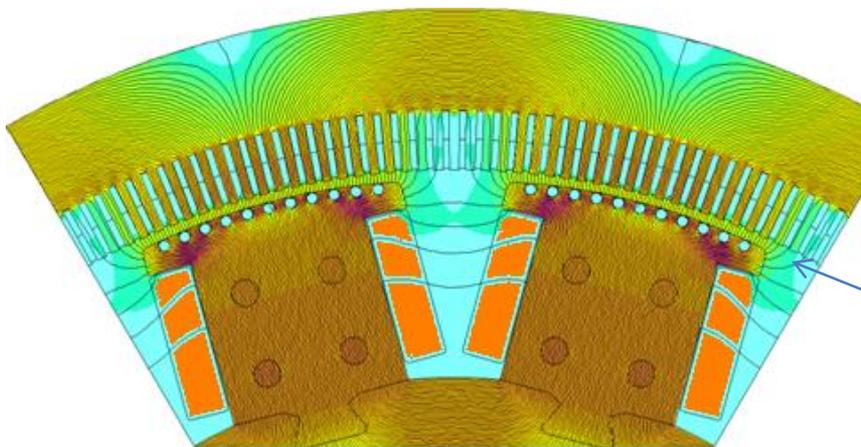
Oltre ad essere avvolti con le spire del circuito di eccitazione, alimentato in corrente continua, i poli di rotore presentano, normalmente, una «gabbia di smorzamento» composta (come la gabbia di scoiattolo della macchina asincrona) da barre in alluminio o rame messe in corto circuito con collegamenti frontati (anelli o piastre).



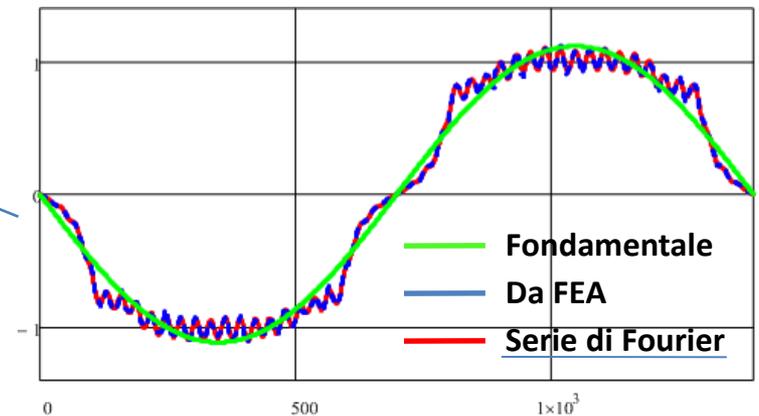


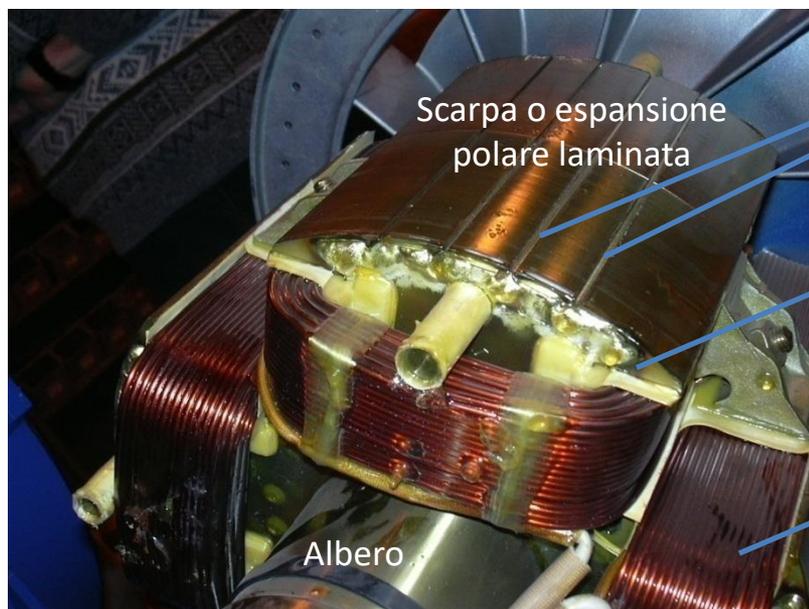
Il raggio di curvatura delle espansioni polari è leggermente inferiore a quello interno dello statore, ossia la circonferenza che delimita esternamente la scarpa polare (arco rosso) non è concentrica con la circonferenza interna dello statore

Ciò per far sì che la corrente di eccitazione del rotore produca una induzione magnetica al traferro avente una forma il più possibile vicina a quella sinusoidale.



Induzione al traferro (T) prodotta dalla sola corrente di eccitazione.





Barre della gabbia di smorzamento

Piastra frontale che mette in corto circuito le barre

Spire del circuito di eccitazione

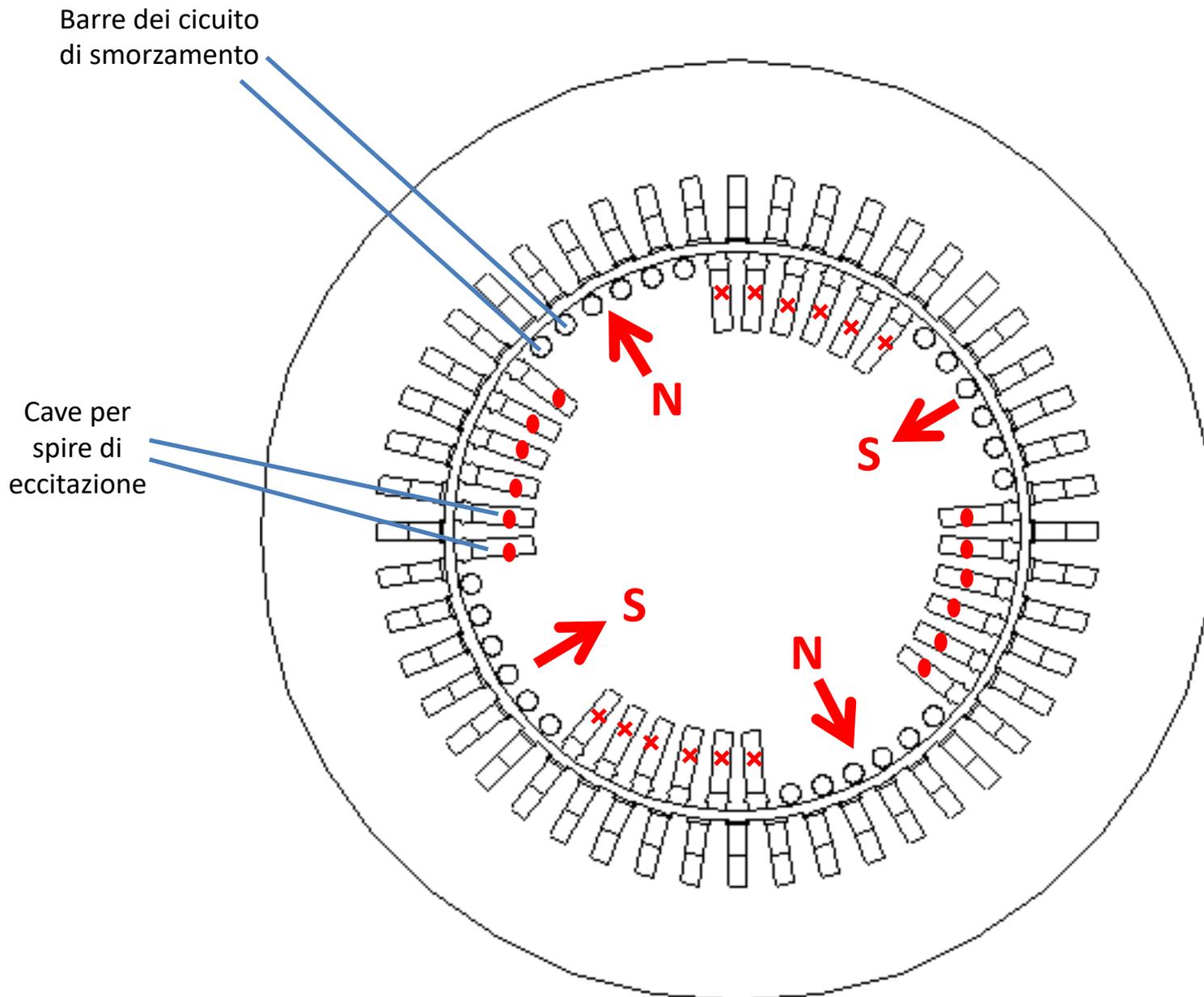
Albero

Scarpa o espansione polare laminata

A regime e in condizioni ideali, la gabbia di smorzamento non porta corrente (in quanto il rotore ruota in sincronismo e quindi ogni barra vede un campo magnetico costante). La gabbia ha le seguenti funzioni:

- A regime, in presenza di correnti statoriche sbilanciate o distorte, si creano al traferro campi magnetici armonici o comunque rotanti in modo non sincrono con il rotore. Tali campi sono dannosi un quanto non producono coppia utile, ma danno perdite (correnti parassite) e oscillazioni di coppia. La gabbia di smorzamento «sente» questi campi armonici non sincroni e, per la legge di Faraday-Lenz, reagisce con correnti che indeboliscono i campi armonici stessi.
- Durante i transitori, la gabbia «sente» le variazioni di campo al traferro e, sempre secondo la legge di Faraday-Lenz, reagisce con correnti che limitano tali variazioni di campo, favorendo e velocizzando quindi il ripristino di condizioni di sincronismo (aumento della stabilità mediante «coppie sincronizzanti» che si creano secondo lo stesso principio della macchina asincrona).

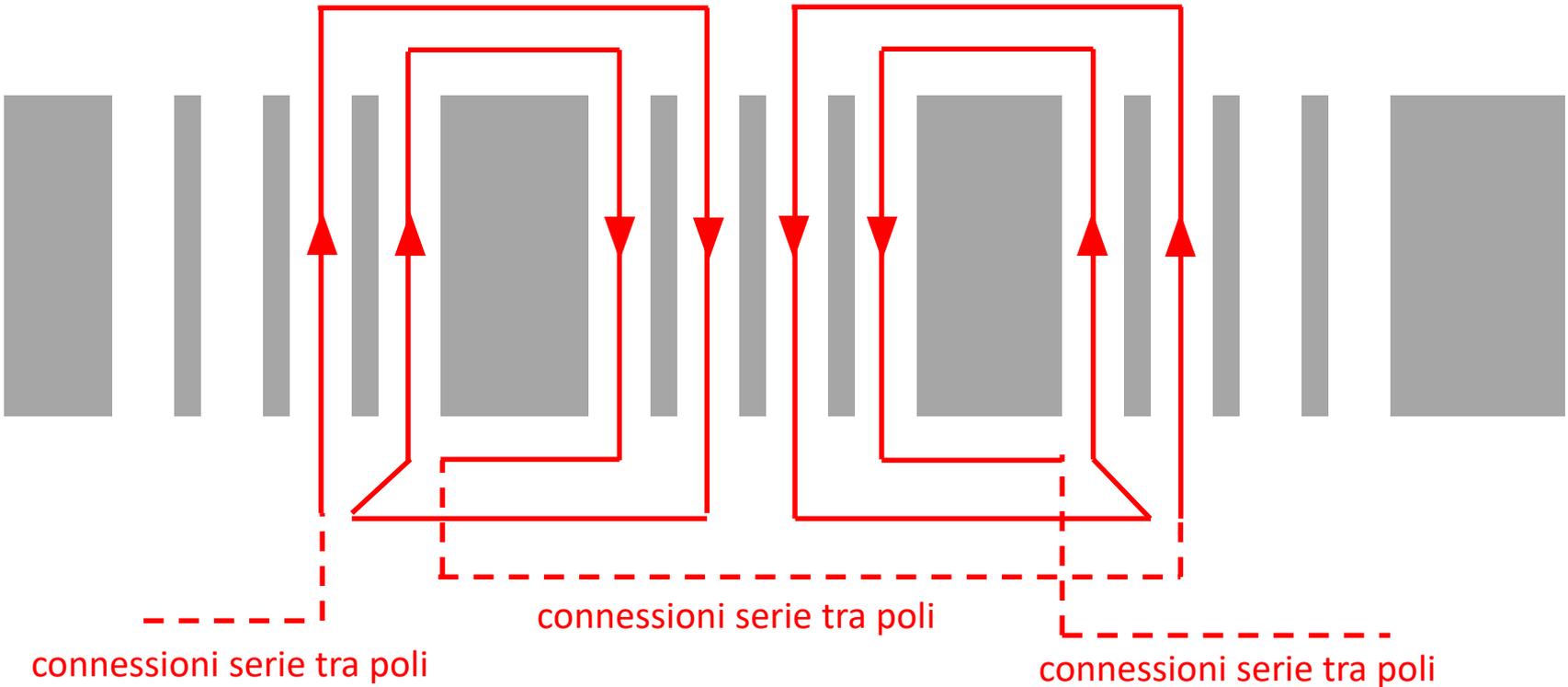
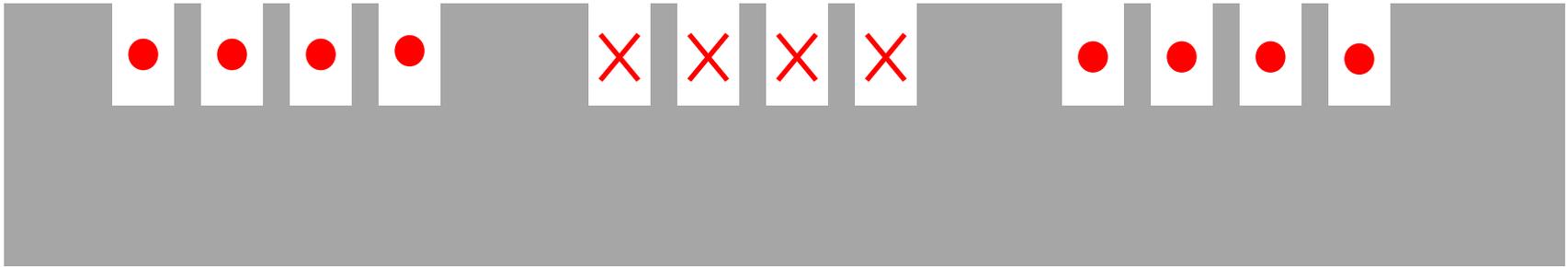
Macchine sincrone con rotore avvolto (eccitate elettricamente): Soluzione con rotore «a poli lisci» o «isotropo»



Il rotore ha forma cilindrica e l'avvolgimento di eccitazione è contenuto in apposite cave

Il rotore può essere sia massiccio che laminato

Struttura dell'avvolgimento di eccitazione



Impieghi tipici di macchine sincrone con rotore a poli lisci o isotrope:

- Generatori di grossa taglia «veloci» (sopra i 1500 giri/min), tipicamente accoppiati a turbine a vapore o turbine a gas (es. in centrali termo-elettriche)
- Motori di grossa taglia «veloci» (sopra i 1500 giri/min), tipicamente accoppiati a compressori a gas (ad esempio per industria Oil & Gas).



L'uso di questa tecnologia al posto della costruzione a poli salienti per macchine sincrone veloci e di grossa taglia si spiega in quanto consente una maggiore resistenza alle forze centrifughe, anche grazie al fatto che le spire di eccitazione sono contenute all'interno di cave.

Sbarre smorzatore

Piastra frontale

Biette per ritenzione delle spire di eccitazione

Distanziatore in acciaio agmagnetico

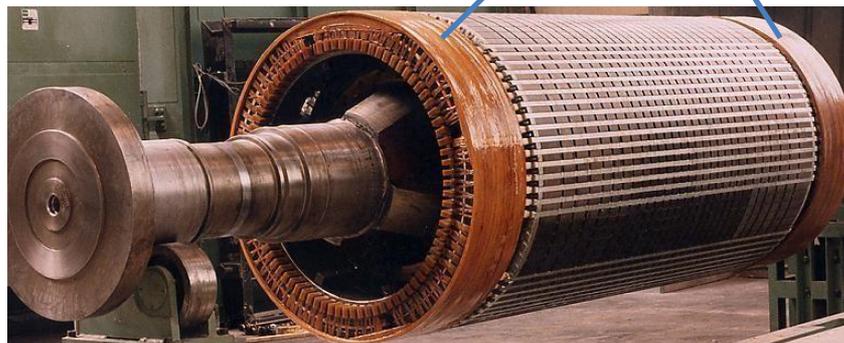
Testate dell'avvolgimento di eccitazione

Distanziatori isolanti forati

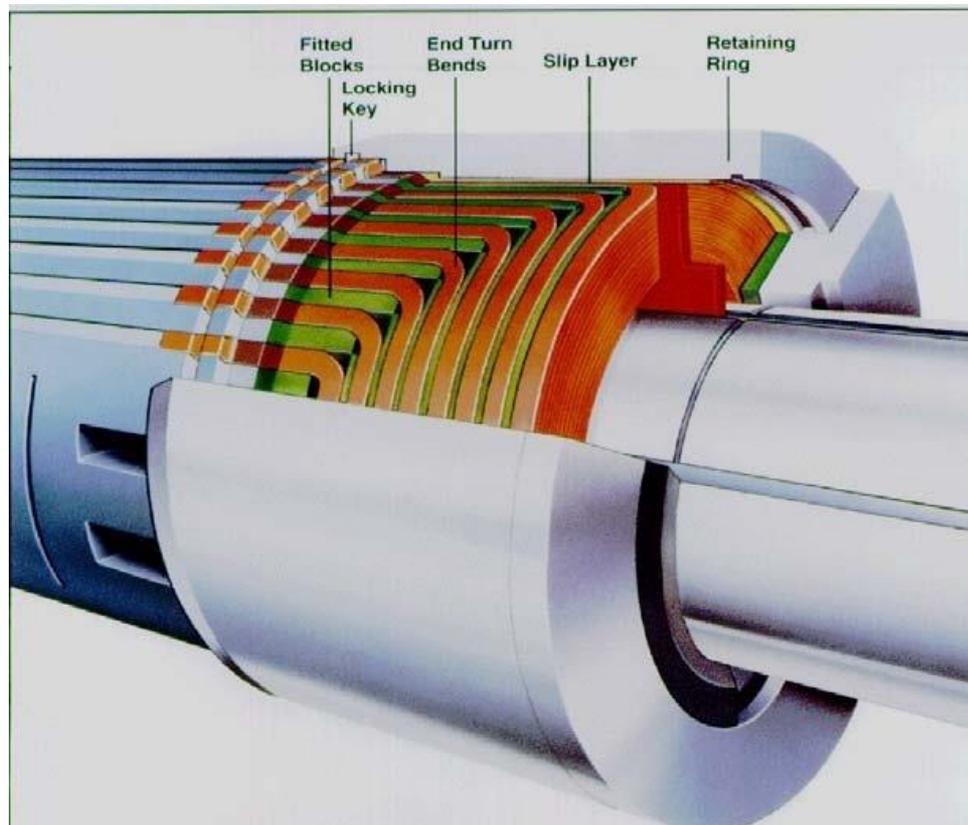


Nastrature di bandaggio

Le testate dell'avvolgimento di eccitazione sono nastrate affinché non si deformino per effetto della forza centrifuga



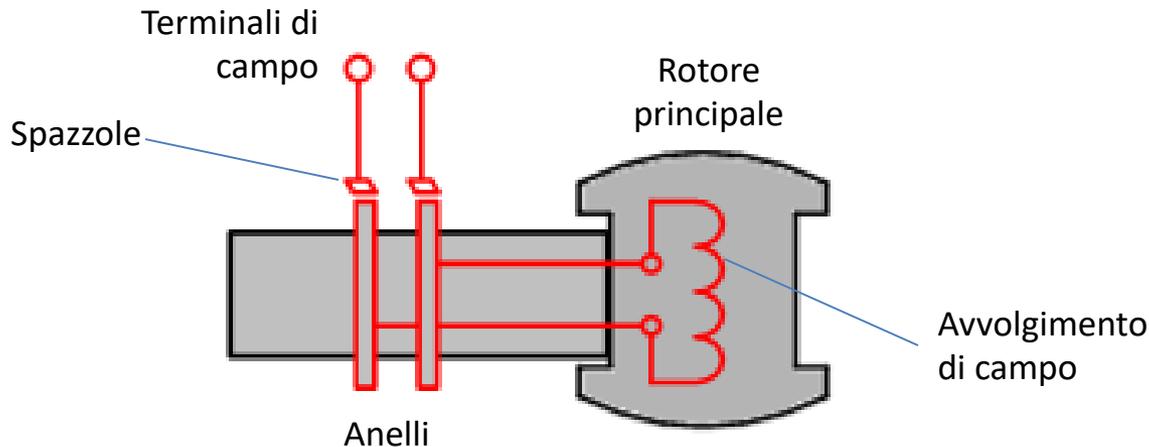
Per velocità elevate (sopra i 3000 giri/min) al posto della nastratura si usa un «anello di blindaggio» o «cappa di blindaggio» in acciaio amagnetico per contenere gli sforzi centrifughi sulle testate dell'avvolgimento di eccitazione.



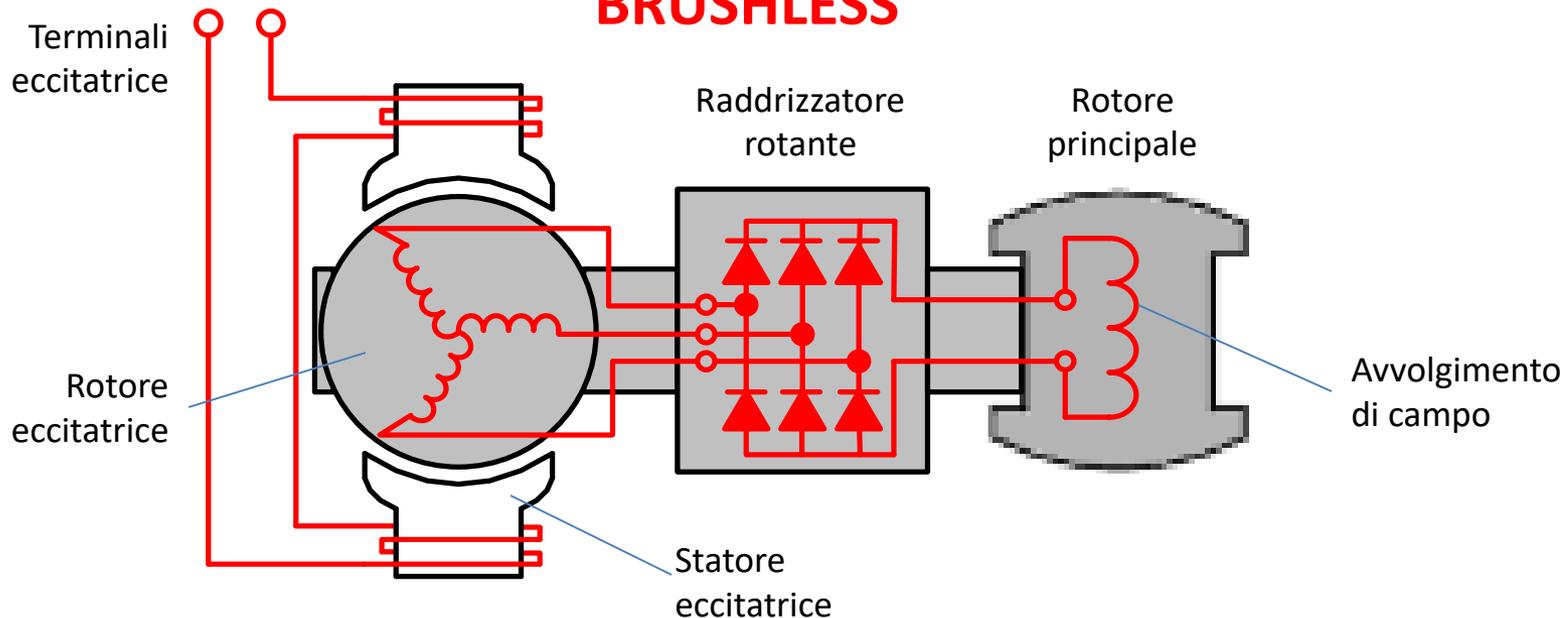
Modalità di alimentazione del campo

NB: vale sia per rotori a poli salienti sia per rotori a poli lisci

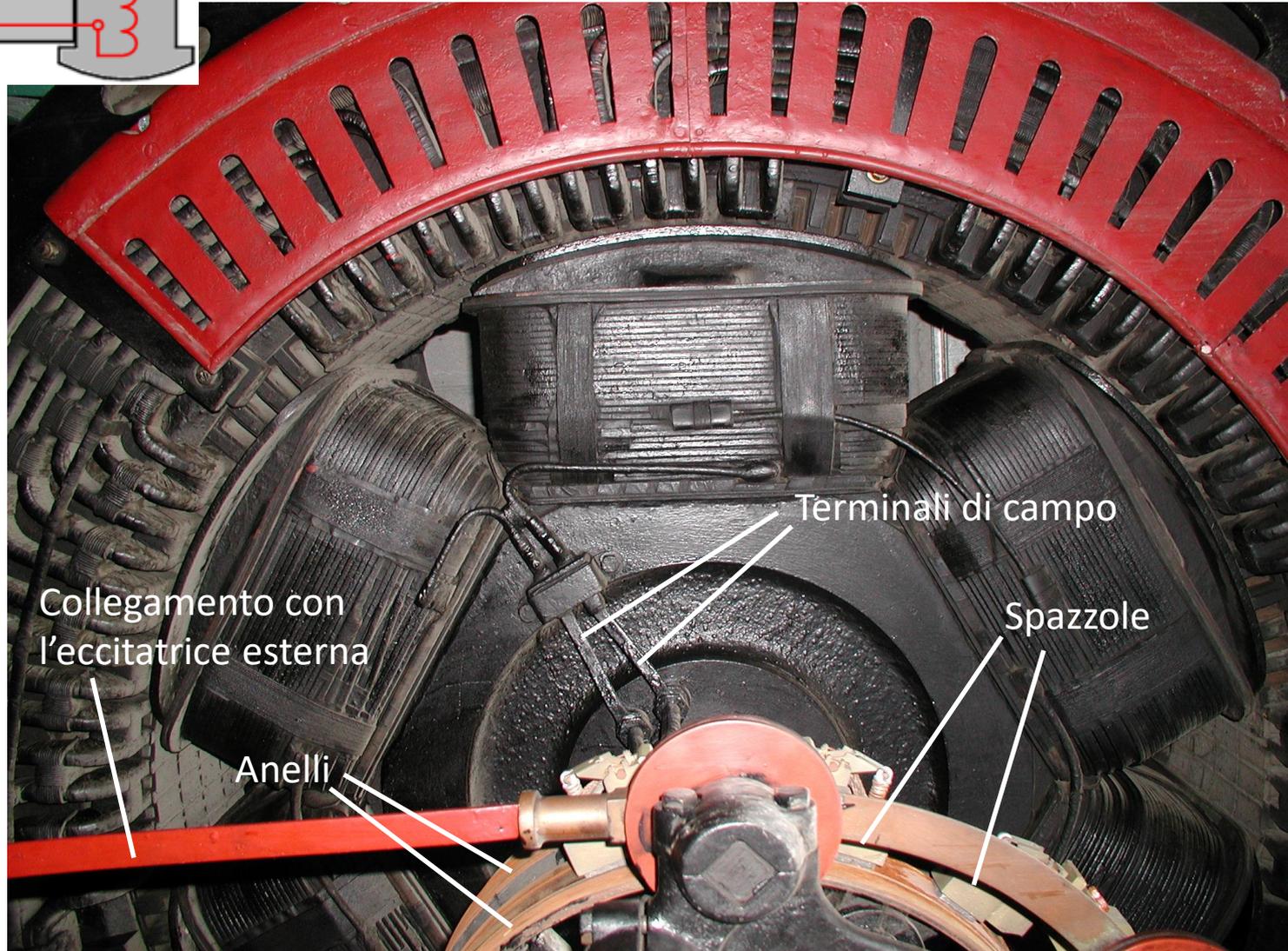
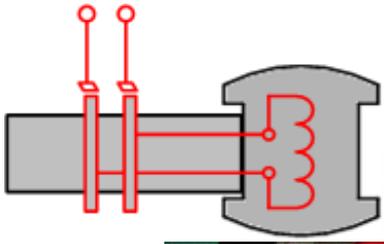
AD ANELLI



BRUSHLESS

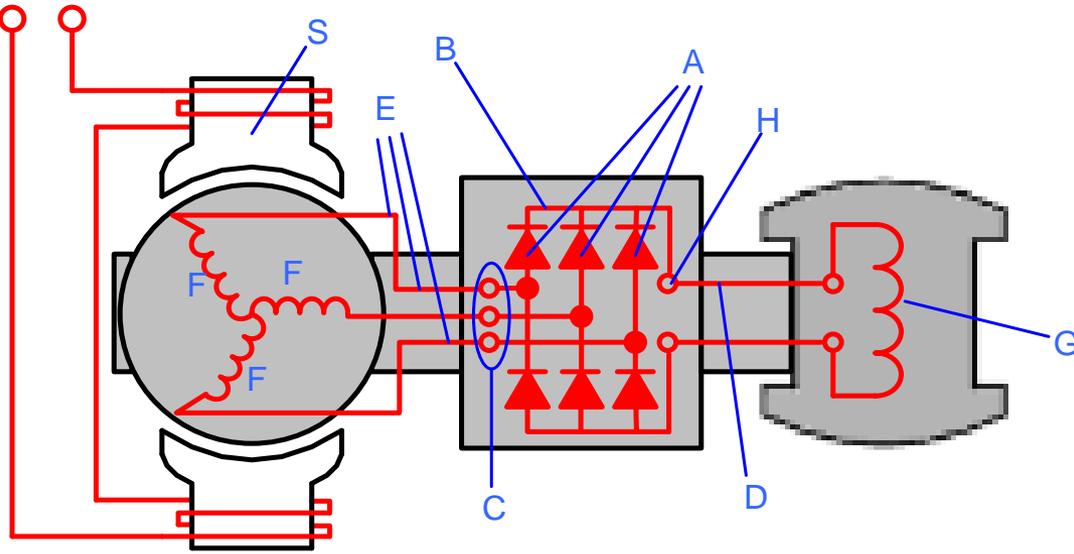


Rotore ad anelli

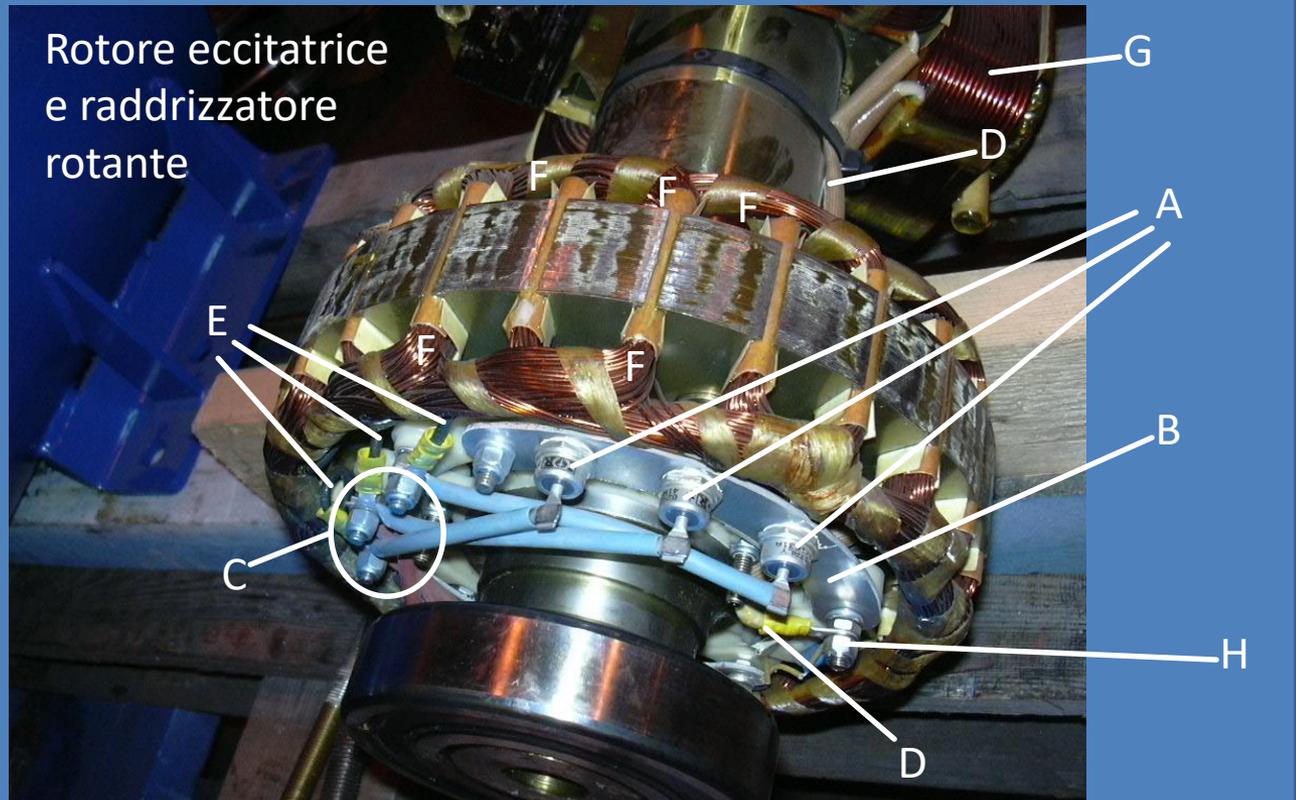


Eccitatrice e raddrizzatore rotante

Esempio di piccolo generatore da 50 kVA, 1500 rpm.



Statore eccitatrice



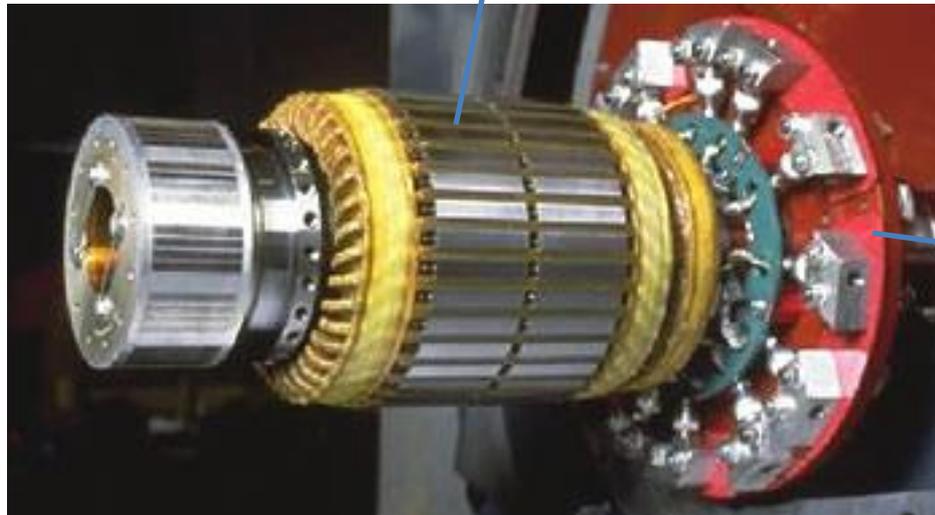
Rotore eccitatrice e raddrizzatore rotante

Eccitrici per macchine di grossa taglia

Rotore eccitatrice con avvolgimento trifase



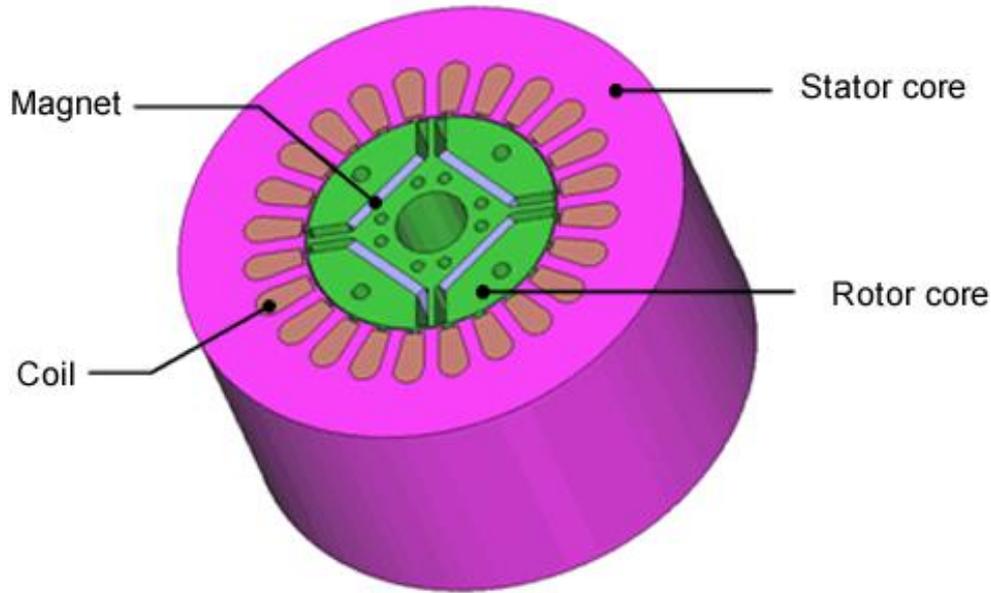
Diodi del raddrizzatore rotante



Ruota porta diodi

Macchine sincrone a magneti permanenti

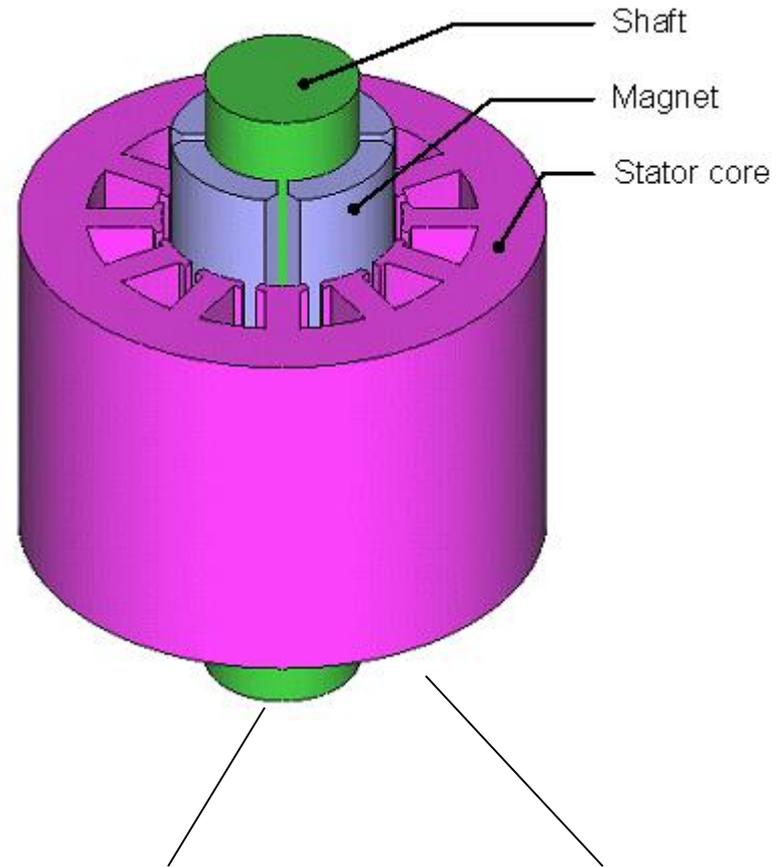
IPM (Interior Permanent Magnet)



S - type

V - type

SPM (Surface P. M.)

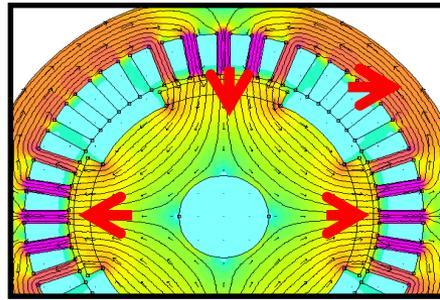


Magnetizzazione radiale

Ad array di Halbach

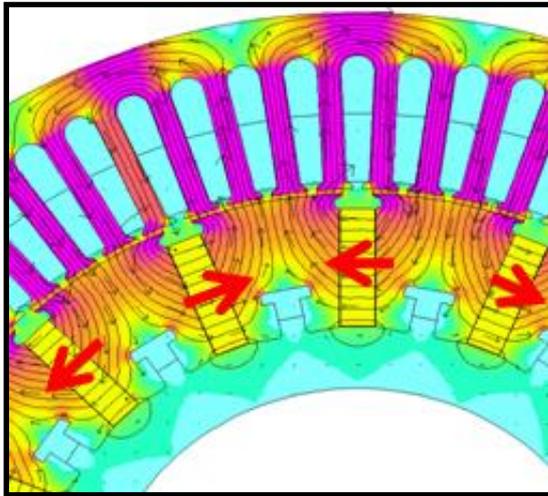
SPM (Surface P. M.)

Sempre a magnetizzazione radiale

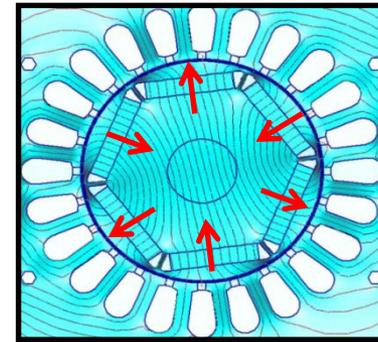


IPM (Interior Permanent Magnet)

A magnetizzazione tangenziale

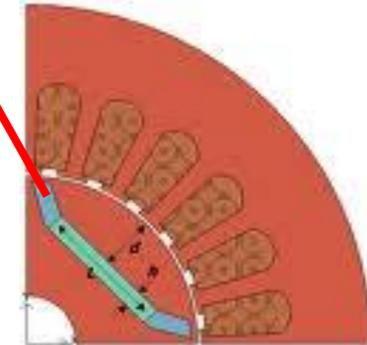
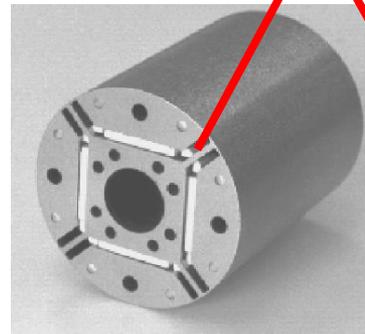


Due magneti, magnetizzati in senso tangenziale, concorrono a creare il flusso di uno stesso polo.



A magnetizzazione radiale

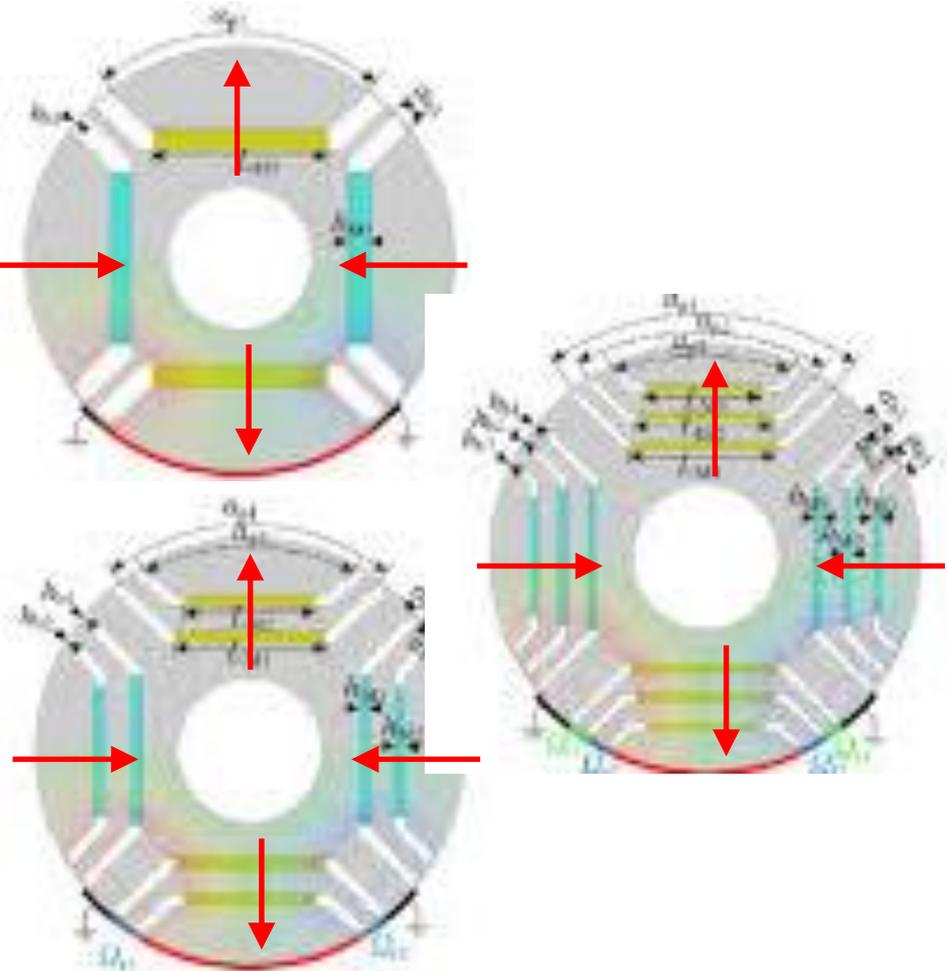
Barriere di flusso



Senza barriere di flusso ci sarebbe richiusura di flusso tra magneti contigui attraverso il rotore

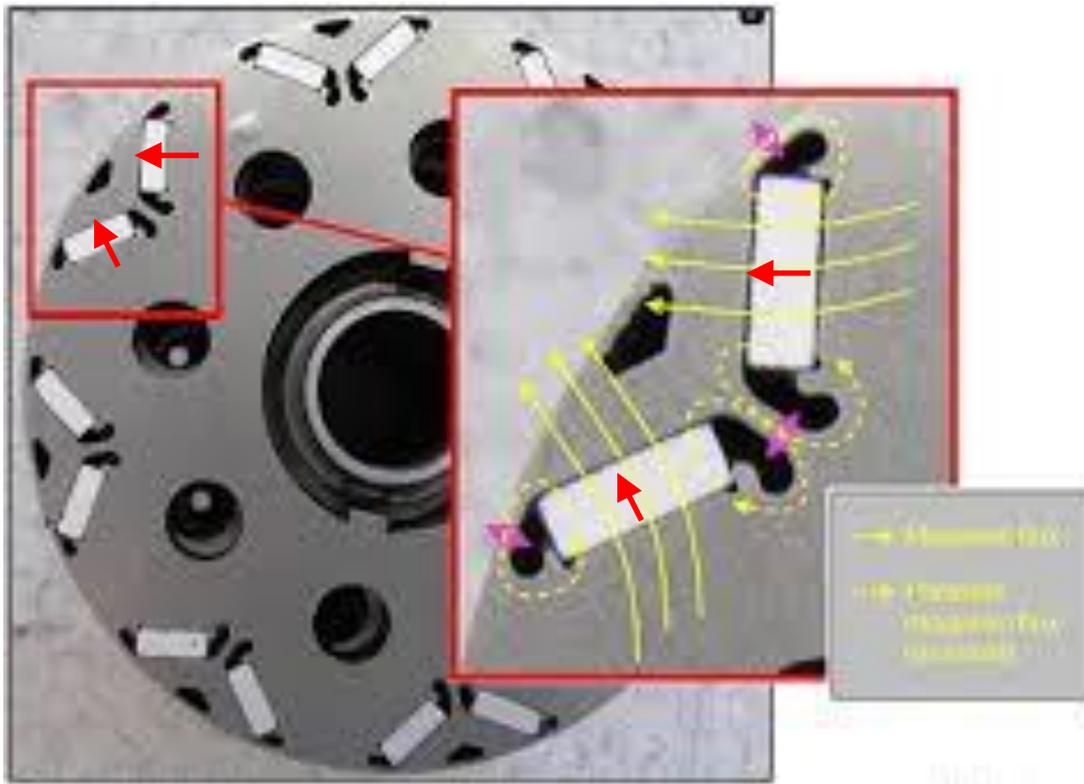
Le macchine a magneti permanenti interni con magnetizzazione radiale possono avere forme molto diverse, con uno, due, o più magneti per polo, disposti affiancati o sovrapposti:

Esempi di costruzione con 1, 2 o 3 magneti per polo, sovrapposti

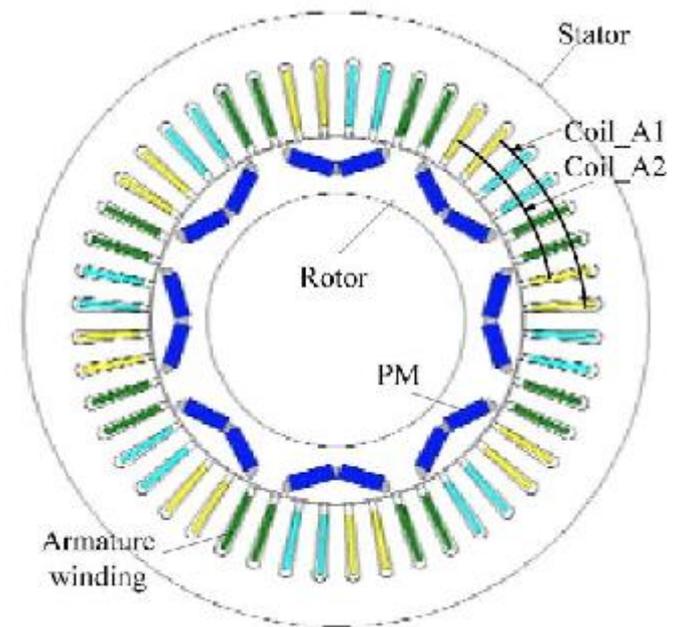


Magneti permanenti interni

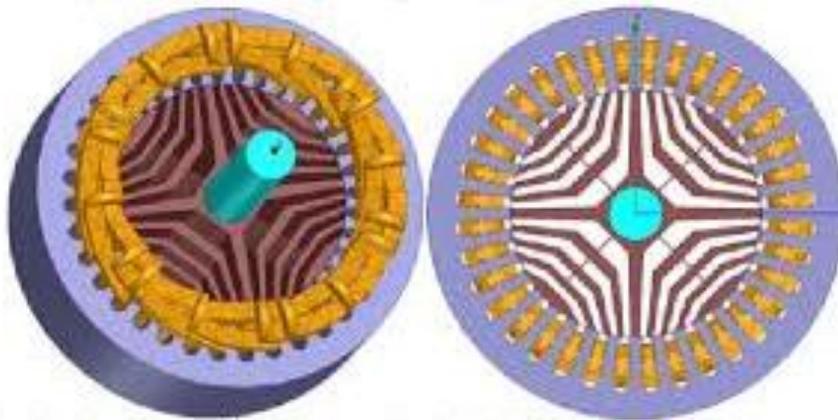
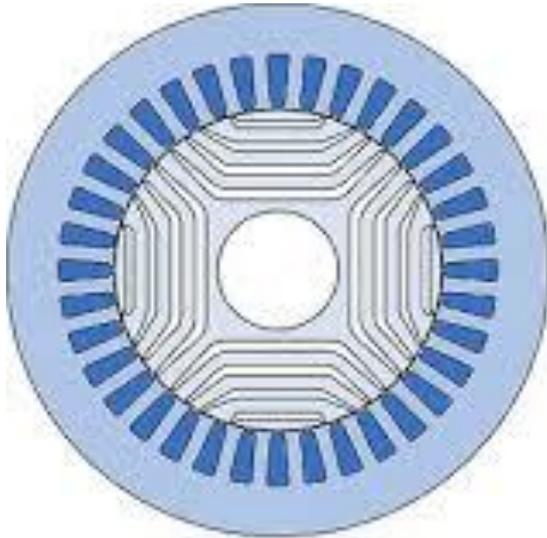
Magneti permanenti interni



Esempi con 2 magneti per polo disposti affiancati «a V»

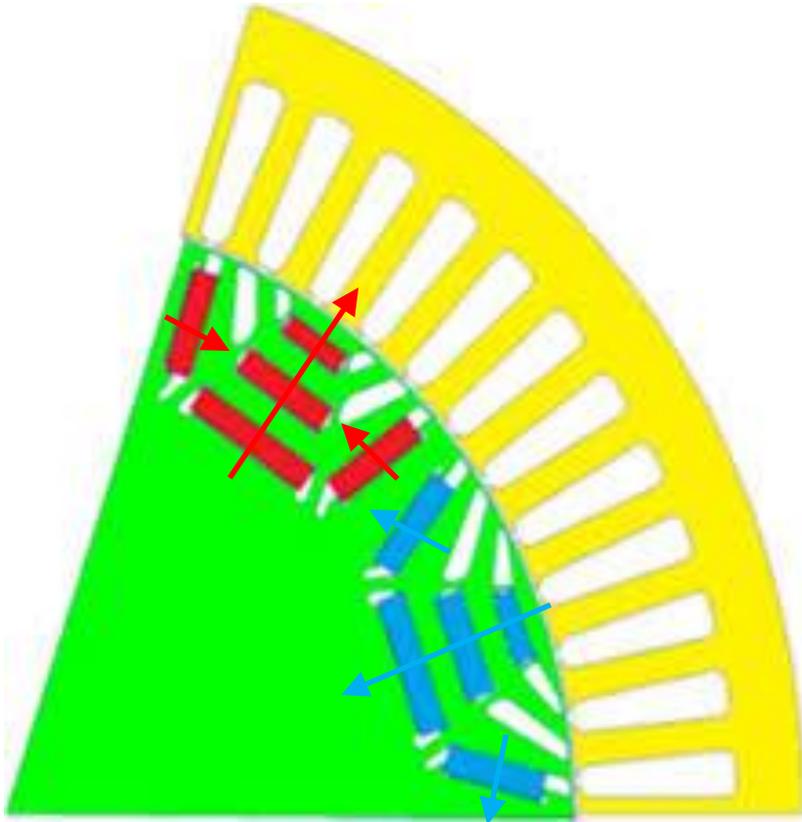


Macchine sincrone a riluttanza



Non ci sono
circuiti elettrici,
nè magneti
permanenti nel
rotore

Macchine sincrone a «riluttanza assistita»

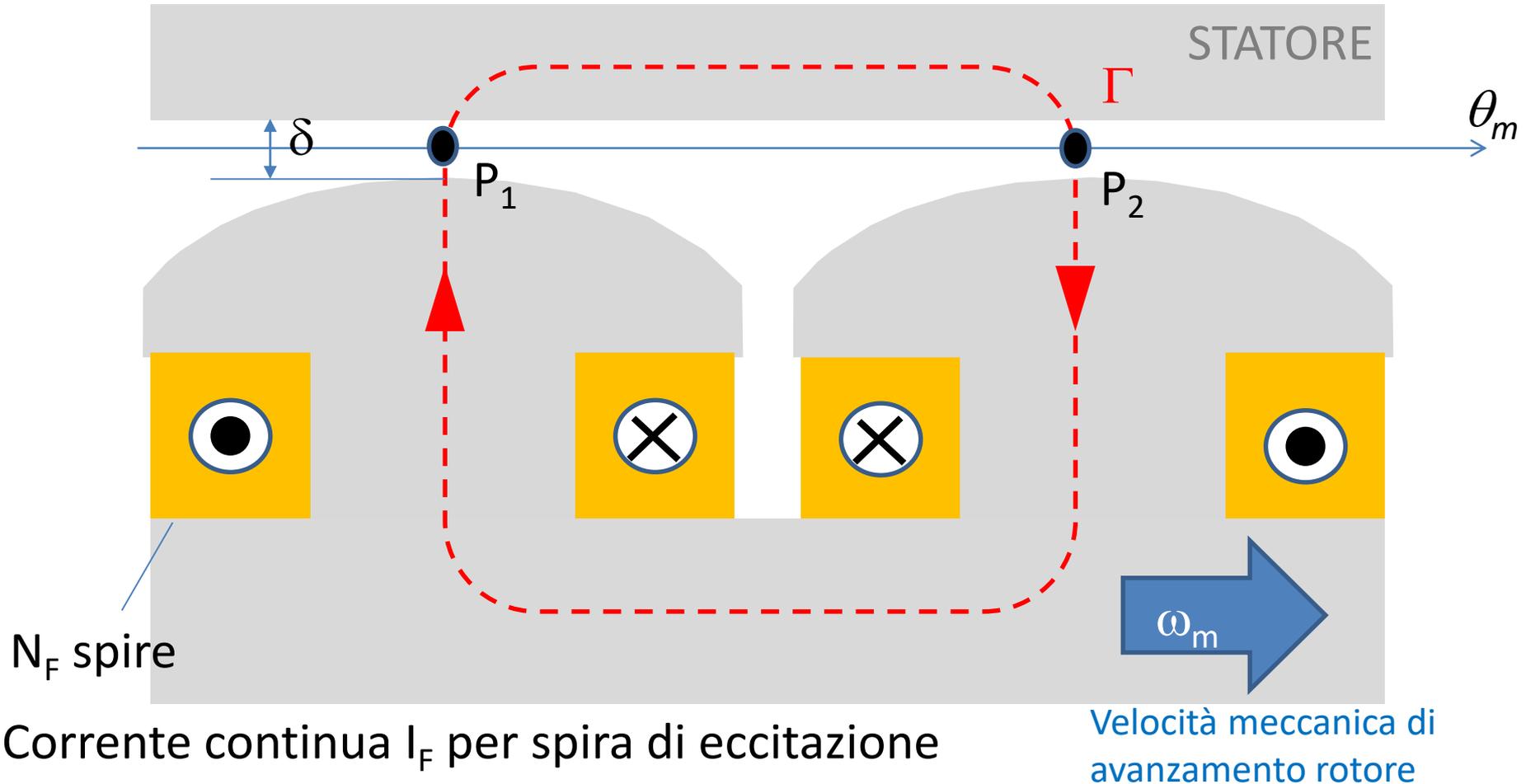


Sono macchine «ibride» che presentano barriere di flusso (come le macchine a riluttanza) all'interno delle quali vengono inseriti i magneti permanenti

Principio di funzionamento

FUNZIONAMENTO A VUOTO

Nel funzionamento «a vuoto» lo statore non porta corrente e il rotore, eccitato con corrente continua I_F , è trascinato in rotazione a velocità ω_m (velocità angolare meccanica).

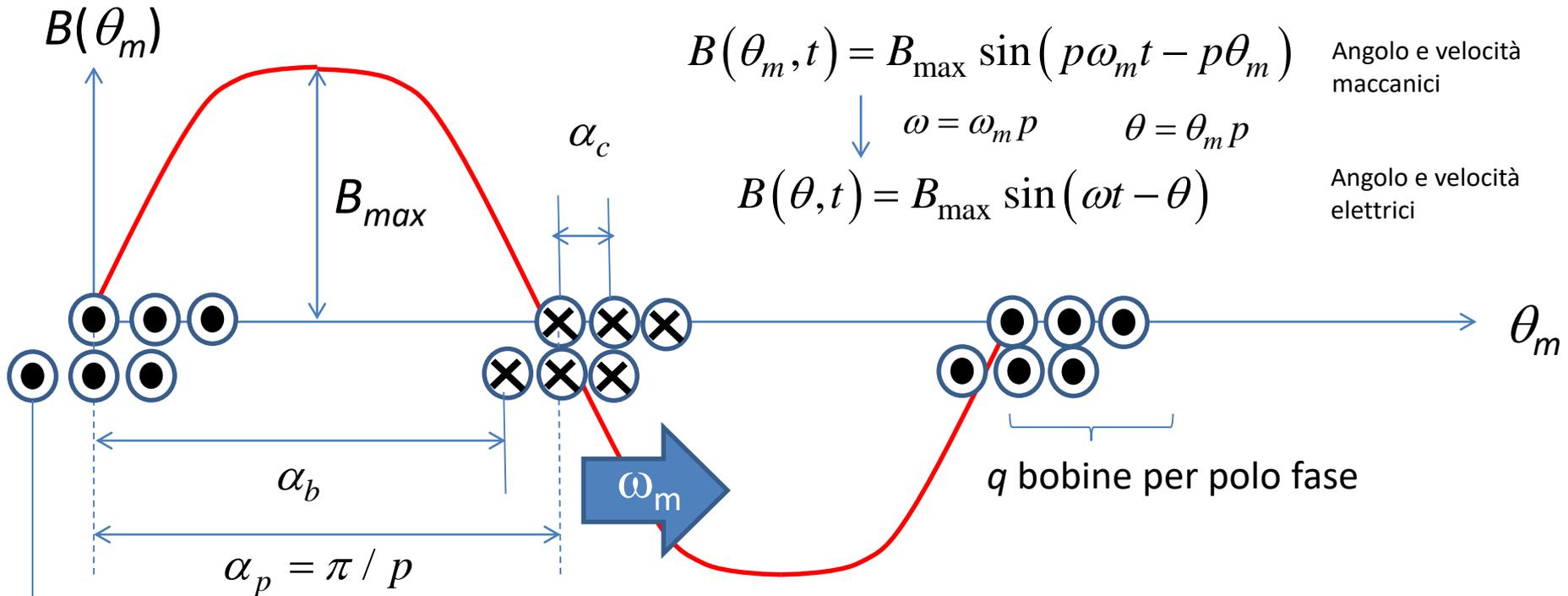


Corrente continua I_F per spira di eccitazione

Definiamo N_F il numero in spire in serie per polo e indichiamo con θ_m l'angolo meccanico che identifica la posizione di un generico punto al traferro. Come al solito, si indica con p il numero di coppie polari.

CALCOLO DEL FLUSSO A VUOTO

Grazie ad un'opportuna scelta della forma dell'espansione polare, l'induzione a vuoto si può assumere circa sinusoidale di valor massimo B_{max} e p coppie polari che si sposta (ruota) solidalmente con il rotore che la genera. Pertanto l'espressione di B nello spazio e nel tempo sarà (vedi parte su campo rotante):



Il valore massimo B_{max} si può trovare facilmente mediante il teorema della circuitazione di Ampere applicato alla curva Γ (slide precedente).

$$2 \frac{B_{max}}{\mu_0} \delta = 2 N_F I_F \quad \longrightarrow \quad B_{max} = \frac{\mu_0 N_F I_F}{\delta} \quad (1)$$

N conduttori (N spire in serie per bobina)

Si definisce flusso a vuoto Φ il flusso magnetico, prodotto dalla corrente di eccitazione, entrante o uscente da ciascun polo di rotore. Esso sarà dato da:

$$\Phi = L \int_0^{\pi/p} B_{\max} \sin(p\theta_m) R d\theta_m = LB_{\max} R \frac{2}{p} = LB_{\max} R \frac{2}{p} \frac{2\pi}{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} LB_{\max} \frac{2\pi R}{2p} = \frac{2}{\pi} B_{\max} L \tau_p \quad (2) \quad \begin{array}{l} L: \text{lunghezza assiale del nucleo magnetico} \\ \tau_p: \text{passo polare} \end{array}$$

Questo prodotto rappresenta l'area della superficie di un polo misurata lungo la circonferenza al traferro

Questo è il «valore medio» (nello spazio) dell'induzione magnetica generata da ogni polo

Il flusso per polo è quindi proporzionale – in assenza di saturazione – alla corrente di eccitazione:

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 N_F I_F}{\delta} \quad [\text{Eq. (1)}]$$

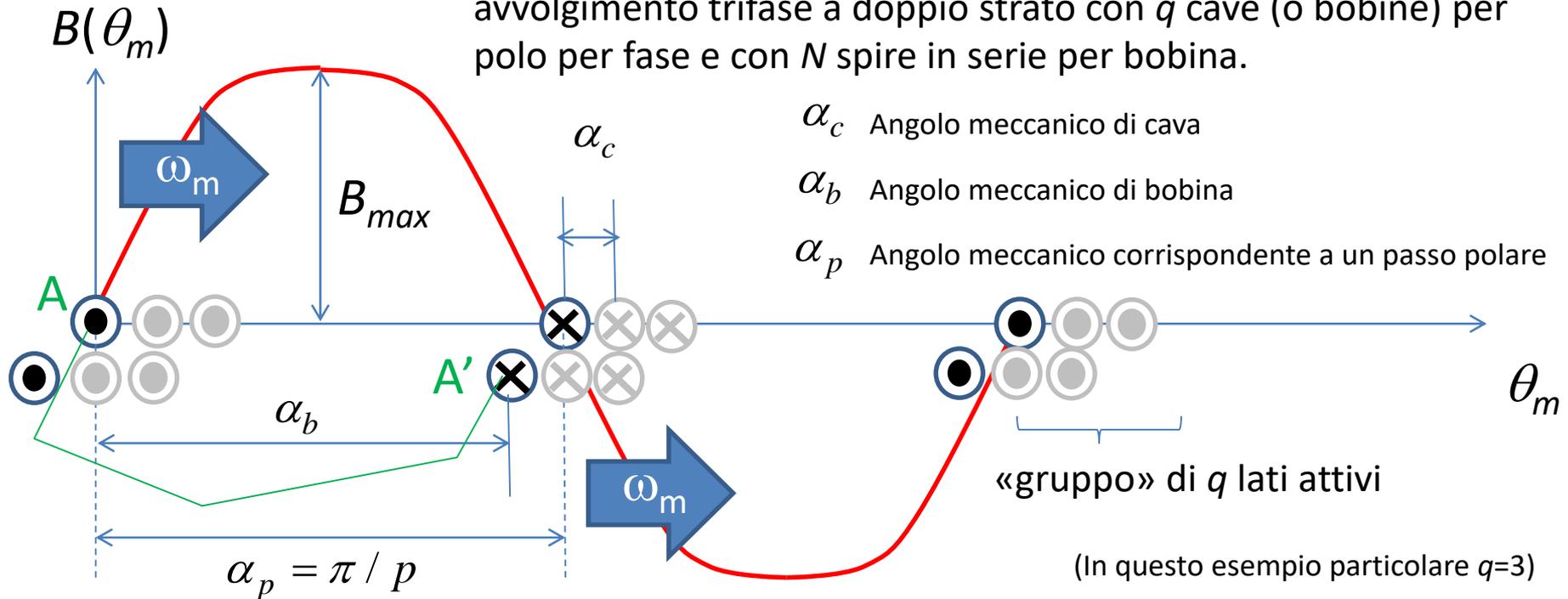
$$\Phi = \frac{2}{\pi} LB_{\max} \tau_p$$

$$\Phi = \left(\frac{2}{\pi} \mu_0 N_F \frac{\tau_p L}{\delta} \right) I_F \quad (3)$$

FORZA ELETTROMOTRICE A VUOTO

Il campo magnetico a vuoto prodotto dalla corrente di eccitazione, ruotando solidalmente con il rotore che lo genera, «taglia» i conduttori si statore creando quindi in essi una f.e.m., di cui si vuole trovare l'espressione.

A tale scopo, ipotizziamo di avere sullo statore un avvolgimento trifase a doppio strato con q cave (o bobine) per polo per fase e con N spire in serie per bobina.



La f.e.m. Indotta in una fase di statore a vuoto (cioè dal flusso a vuoto) è calcolabile mediante la legge di Faraday come derivata nel tempo del flusso concatenato con tutte le bobine, connesse in serie, contenute in una fase. Per calcolare tale flusso concatenato, cominciamo con il considerare le prime bobine di ciascun gruppo polo fase, cioè quelle indicate in nero nella figura sopra. Il flusso concatenato con tali bobine sarà $\lambda_1(t)$ dato da:

Flusso concatenato con una singola bobina, composta da N spire in serie
(ad esempio la bobina con lati attivi A e A' nella fig. precedente)

$$\lambda_1(t) = \frac{2p}{b} NL \int_0^{\alpha_b} B_{\max} \sin(p\omega_m t - p\theta_m) R d\theta_m =$$

$$= 4LNRB_{\max} \underbrace{\frac{1}{b} \sin\left(\frac{p\alpha_b}{2}\right)}_{k_r} \cos(p\omega_m t + \beta_0) \quad (4)$$

Opportuna costante non influente ai fini dello studio

k_r : coefficiente di raccorciamento
(vedi parte su campo rotante)

b : numero di rami in parallelo per fase

Sappiamo che:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} LB_{\max} \tau_p \quad [\text{Eq. (2)}]$$

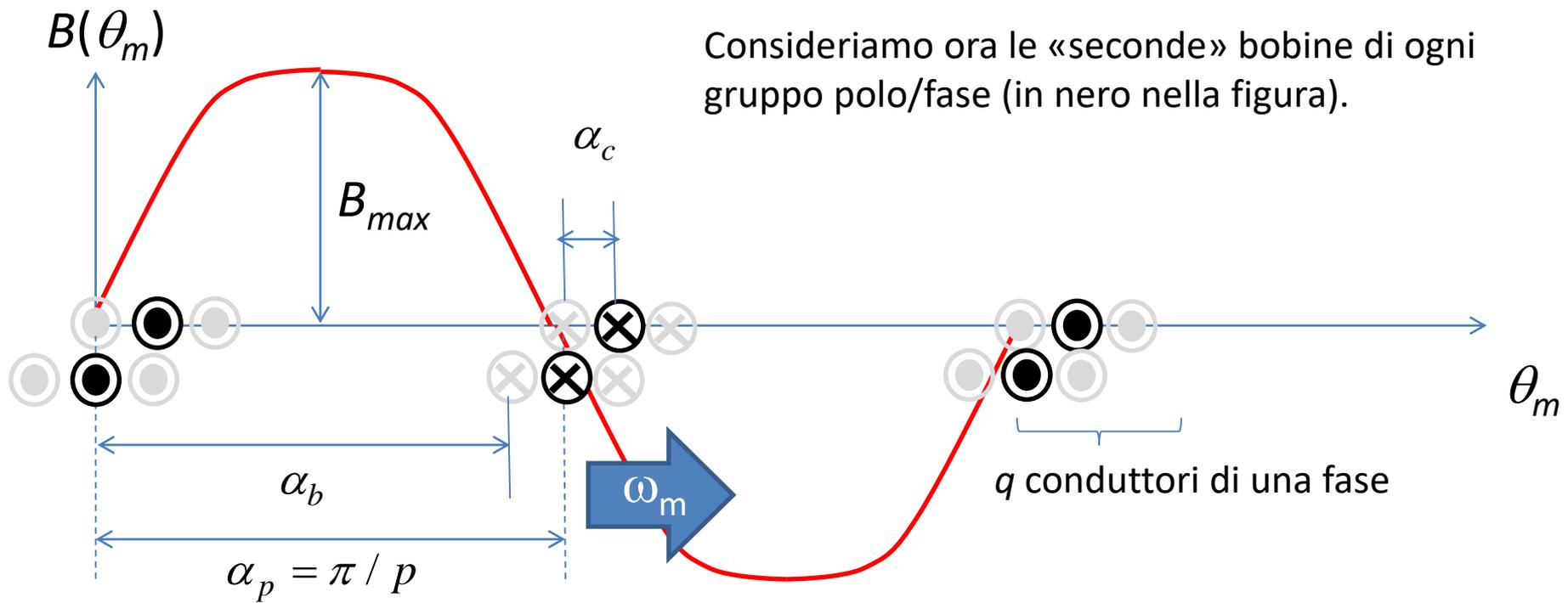
Numero di bobine in serie per fase

$$N_s = \underbrace{\frac{6pq}{3}}_3 \frac{N}{b} = 2pq \frac{N}{b} \quad (5) \quad [\text{Si veda parte sul campo rotante}]$$

Numero totale di bobine di una fase

Sostituendo (2) e (5) in (4), questa diventa:

$$\lambda_1(t) = \frac{4N\Phi p}{\pi b} k_r \cos(p\omega_m t + \beta_0) = \Phi \frac{N_s}{q} k_r \cos(p\omega_m t + \beta_0) \quad (6)$$



Il flusso concatenato totale con tali bobine $\lambda_2(t)$ sarà identico a quello $\lambda_1(t)$ calcolato per le prime bobine di ogni gruppo, ma sfasato nel tempo del tempo Δt impiegato dal campo a vuoto per percorrere un passo cava, cioè:

$$\omega_m = \frac{\alpha_c}{\Delta t} \longrightarrow \Delta t = \frac{\alpha_c}{\omega_m} = \frac{\alpha_{c,e} / p}{\omega_m} = \frac{\alpha_{c,e}}{p \omega_m}$$

α_c Angolo meccanico di cava
 $\alpha_{c,e}$ Angolo elettrico di cava

$$\lambda_2(t) = \lambda_1(t - \Delta t) = \lambda_1\left(t - \frac{\alpha_{c,e}}{p \omega_m}\right) = \Phi \frac{N_s}{q} k_r \cos\left(p \omega_m t - \alpha_{c,e} + \beta_0\right) \quad (7)$$

Analogamente il flusso concatenato con le terze bobine di ogni gruppo polo/fase sarà:

$$\lambda_3(t) = \lambda_1(t - 2\Delta t) = \lambda_1\left(t - \frac{2\alpha_{c,e}}{p \omega_m}\right) = \Phi \frac{N_s}{q} k_r \cos\left(p \omega_m t - 2\alpha_{c,e} + \beta_0\right) \quad (8)$$

e così via per tutte le q bobine che formano un gruppo polo/fase.

Poichè le q bobine per polo fase sono sempre collegate tra loro in serie (vedi parte su campo rotante), il flusso concatenato complessivo $\lambda(t)$ per una fase si trova sommando i contributi di tutte le q bobine per polo fase, cioè:

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \Phi \frac{N_s}{q} k_r \cos(p\omega_m t - k\alpha_{c,e} + \beta_0) = \Phi \frac{N_s}{q} k_r \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} e^{j(p\omega_m t - k\alpha_{c,e} + \beta_0)} \right\} \quad (9)$$

Esattamente come fatto per trovare l'espressione del campo rotante totale prodotto da un avvolgimento trifase (v. parte su campo rotante), si dimostra che la somma tra parentesi graffa si può esprimere come:

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{j(p\omega_m t - k\alpha_{c,e} + \beta_0)} = k_d q e^{j(p\omega_m t + \beta_1)} \quad (10)$$

essendo β_1 una opportuna costante (che non è di interesse in quanto determina semplicemente la fase iniziale dell'espressione del flusso concatenato) e k_d è il coefficiente di distribuzione, già introdotto parlando di campo rotante e dato da:

$$k_d = \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_{c,e}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\alpha_{c,e}}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{q \sin\left(\frac{\pi}{6q}\right)} \quad (11)$$

Sostituendo (10) in (9) questa diventa:

$$\lambda(t) = \Phi \frac{N_s}{q} k_r k_d q \cos(p\omega_m t + \beta_1) = \Phi N_s k_r k_d \cos(p\omega_m t + \beta_1) \quad (12)$$

A questo punto, per la legge di Faraday-Lenz, la f.e.m. Indotta in una fase dal campo a vuoto è data da:

$$e(t) = -\frac{d}{dt} \lambda(t) = \underbrace{\Phi N'_s k_r k_d p \omega_m}_{E_{\max}} \sin \left(\omega t + \beta_0 + \beta_1 \right) \quad (13)$$

Questa si può riscrivere come: $e(t) = E_{\max} \sin(\omega t + \beta_0 + \beta_1)$ (14)

dove:

$$E_{\max} = \Phi N'_s \omega \quad (15)$$

$$N'_s = N_s k_r k_d \quad \omega = p \omega_m \quad (16)$$

Numero di spire efficaci in serie per fase
(già introdotto per le macchine
asincrone)

Pulsazione angolare della f.e.m. Indotta

NB: si nota che le f.e.m. Indotte a vuoto hanno una pulsazione angolare uguale alla velocità elettrica di rotazione del rotore. La corrispondente frequenza è:

$$\omega = \omega_m p = 2\pi f \longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_m p}{2\pi} \quad (17)$$

Il valore efficace della forza elettromotrice indotta in ciascuna fase sarà, da (15):

$$E_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{max} = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} \Phi N'_s = \pi\sqrt{2}\Phi f N'_s \cong 4.44\Phi f N'_s$$

$$E_{eff} = \pi\sqrt{2} \Phi f N'_s \cong 4.44 \Phi f N'_s \quad (18)$$

Si noti la somiglianza con la formula trovata per il trasformatore: è la stessa salvo sostituire le spire in serie per fase con le spire efficaci in serie per fase e interpretare il flusso come flusso per polo.

IN SINTESI:

Se il rotore ruota con velocità meccanica ω_m ed è alimentato con una corrente di eccitazione I_F tale da produrre un flusso per polo Φ :

$$\Phi = \left(\frac{2}{\pi} \mu_0 N_F \frac{\tau_p L}{\delta} \right) I_F$$

allora nelle tre fasi di statore (con N_s spire in serie per fase) si inducono forze elettromotrici con valore efficace:

$$E_{eff} = 4.44 \Phi f N'_s$$

Usualmente la velocità del rotore non si esprime in radianti al secondo ma in giri al minuto e si indica con n [giri/min]. Allora la relazione tra la velocità del rotore n in giri al minuto e la frequenza f delle forze elettromotrici indotte nello statore sarà:

$$f = \frac{p\omega_m}{2\pi} \quad [\text{Eq- (17)}]$$

Se esprimiamo la velocità in giri / minuto n :

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega_m \longrightarrow \omega_m = \frac{2\pi}{60} n$$

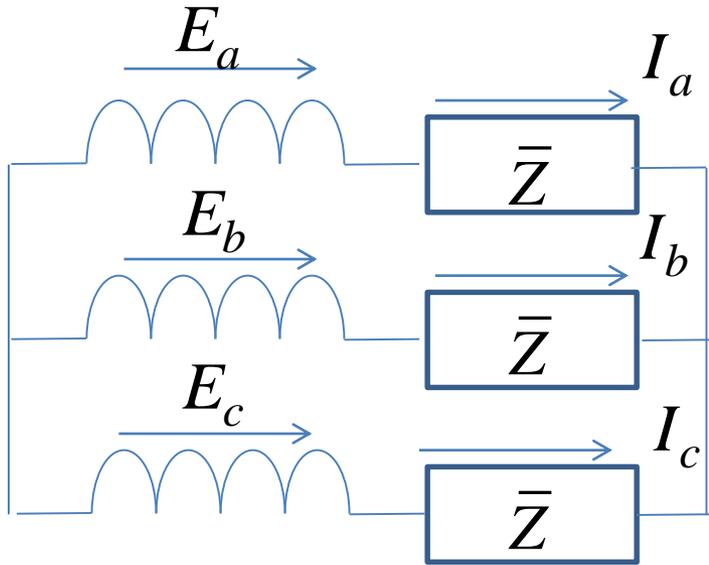
$$n = \frac{60 f}{p}$$

(19)

$$f = \frac{p}{2\pi} \frac{2\pi}{60} n = \frac{p}{60} n$$

FUNZIONAMENTO A CARICO

Il funzionamento a carico è quello in cui non solo il circuito di eccitazione, ma anche le fasi di statore portano corrente.



Ad esempio, partendo dalla condizione di funzionamento a vuoto vista finora, si supponga di chiudere le fasi di statore (prima circuiti aperti) su un carico trifase bilanciato con impedenza Z :

Come visto nello studio del funzionamento a vuoto, su ciascuna delle tre fasi di statore si crea una f.e.m. dovuta al flusso a vuoto. Questa f.e.m., applicata al carico, produce delle correnti nelle fasi di statore con valore efficace

$$I_{eff} = E_{eff} / Z \quad \text{Data dalla (18)}$$

Queste correnti hanno frequenza f e pulsazione ω pari a quelle delle f.e.m. [v. (17)] e, come visto, danno a loro volta origine a un campo rotante con p coppie polari e velocità di rotazione meccanica

$$\omega_m = 2\pi f / p$$

pari alla velocità del rotore [v. (17)].

Il campo prodotto dalle correnti di statore si chiama campo di «reazione di armatura».

Si è appena dimostrato che il campo di reazione di armatura ruota sincrono con il campo di rotore e ha lo stesso numero di coppie polari. Quindi si genererà una coppia all'asse in base a quanto visto nello studio del campo rotante.

La coppia generata, alla velocità ω_m , è ovviamente legata alla potenza elettrica scambiata con l'esterno, in base al solito bilancio energetico (potenza entrante = potenza uscente).
Ossia:

$$3E_{eff} I_{eff} \cos \varphi = T_m \omega_m + P_{loss} \quad \text{Nel caso di motore sincrono}$$

$$3E_{eff} I_{eff} \cos \varphi + P_{loss} = T_m \omega_m \quad \text{Nel caso di generatore sincrono}$$

Fattore di potenza

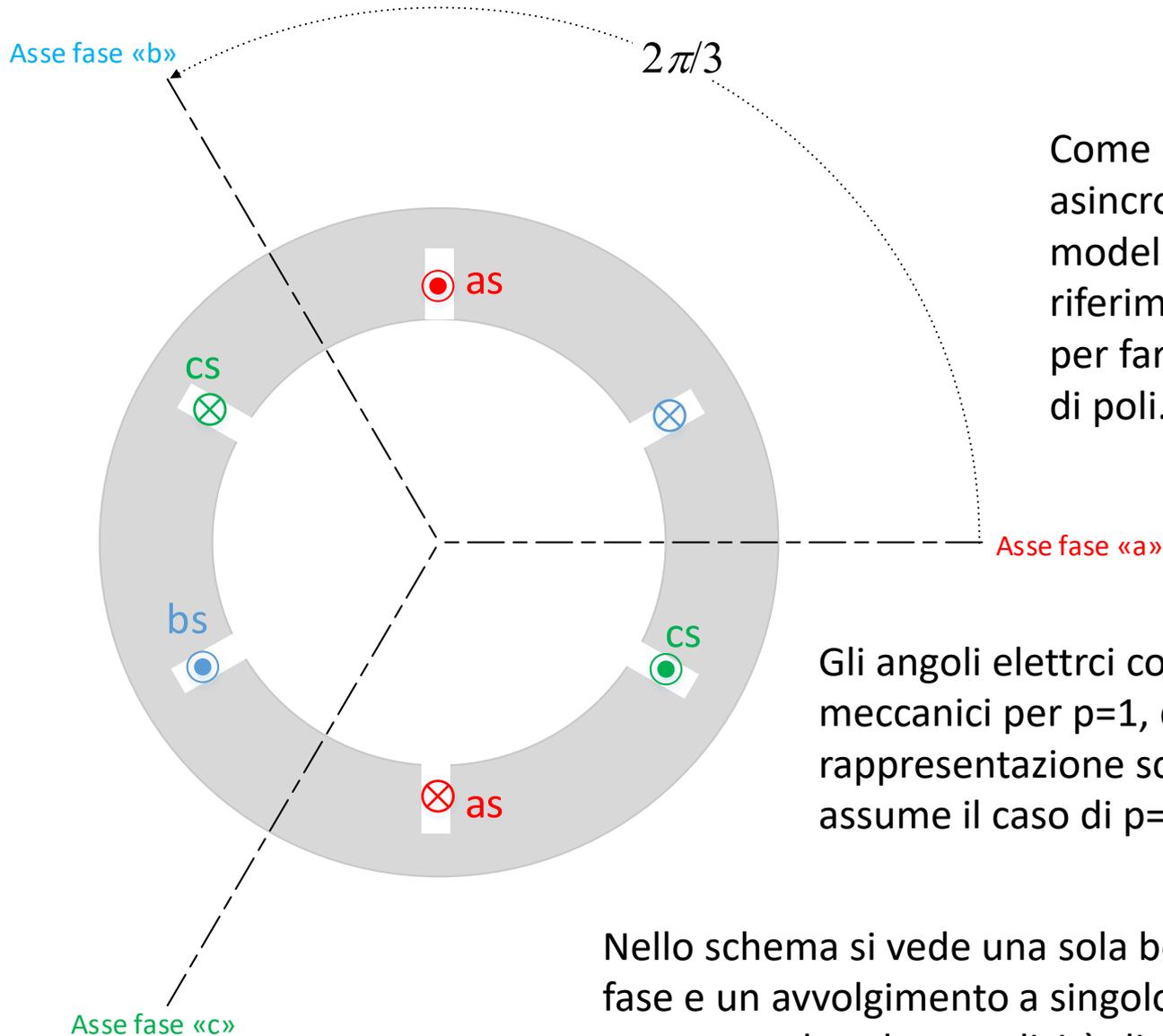
Coppia all'asse (definita positiva)

Perdite (meccaniche, magnetiche, joule)

Modellazione matematica di macchine sincrone a rotore avvolto

Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Statore



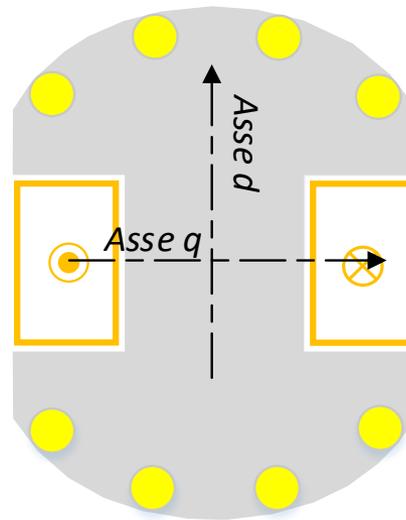
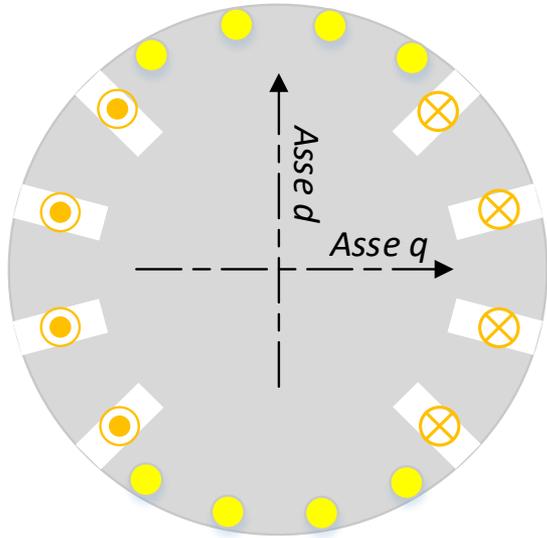
Come nel caso di macchine asincrone, nella modellizzazione si fa riferimento ad angoli elettrici per fare astrazione dal numero di poli.

Gli angoli elettrici coincidono con quelli meccanici per $p=1$, quindi nella rappresentazione schematica (grafica) si assume il caso di $p=1$ (macchina a due poli).

Nello schema si vede una sola bobina per fase e un avvolgimento a singolo strato, ma questo per la sola semplicità di rappresentazione

Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Rotore



DEFINIZIONI

Asse d : asse del
flusso a vuoto

Asse q : sfasato di $\pi/2$
radianti elettrici
rispetto all'asse d

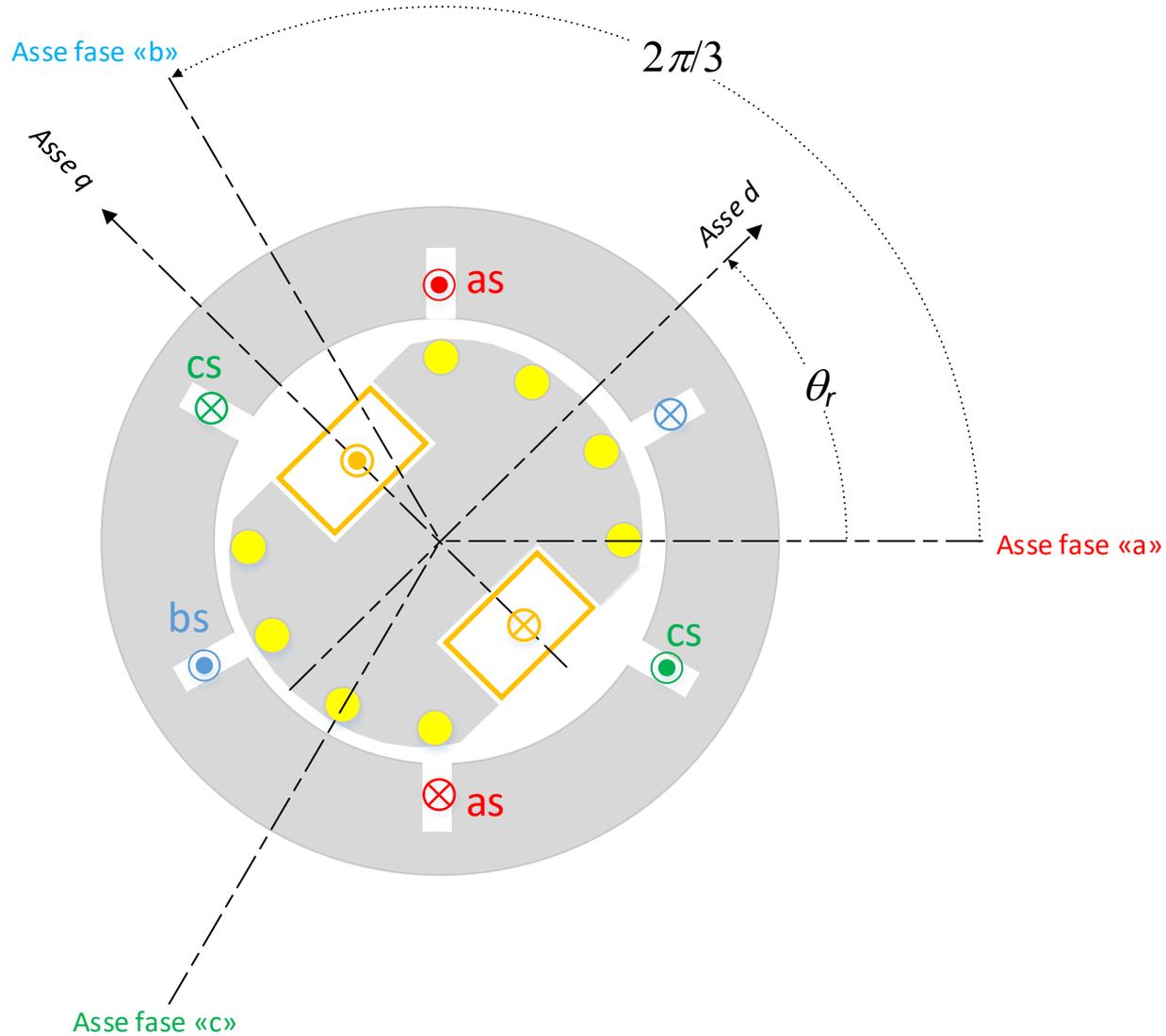
● Barre della gabbia smorzatrice (indicata con simbolo «k»)

⊙ ⊗ Avvolgimento di eccitazione o di campo (indicato con simbolo «f»)

L'asse d è individuato in direzione e verso dal campo prodotto dall'avvolgimento di eccitazione

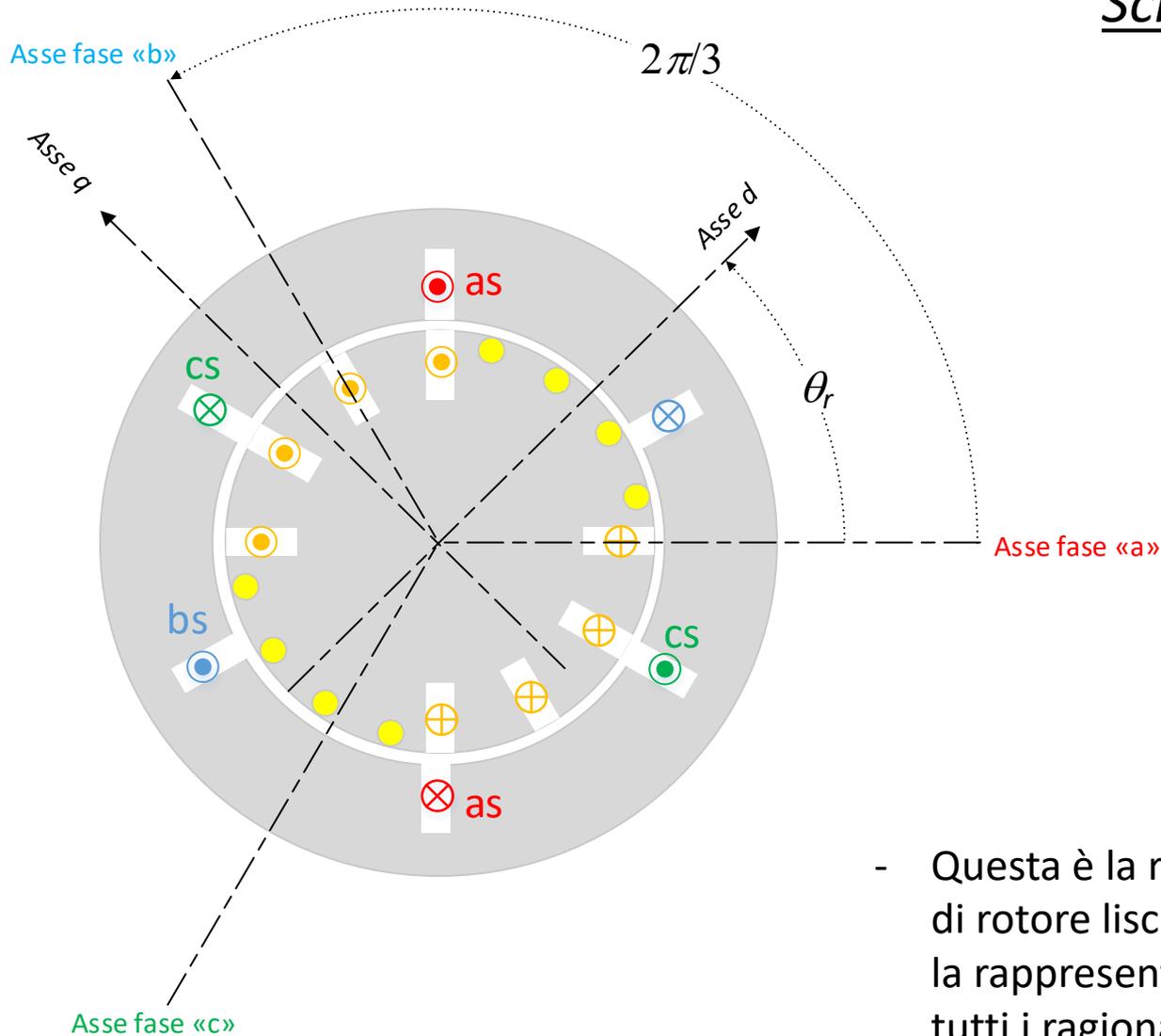
Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Schema complessivo



Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Schema complessivo

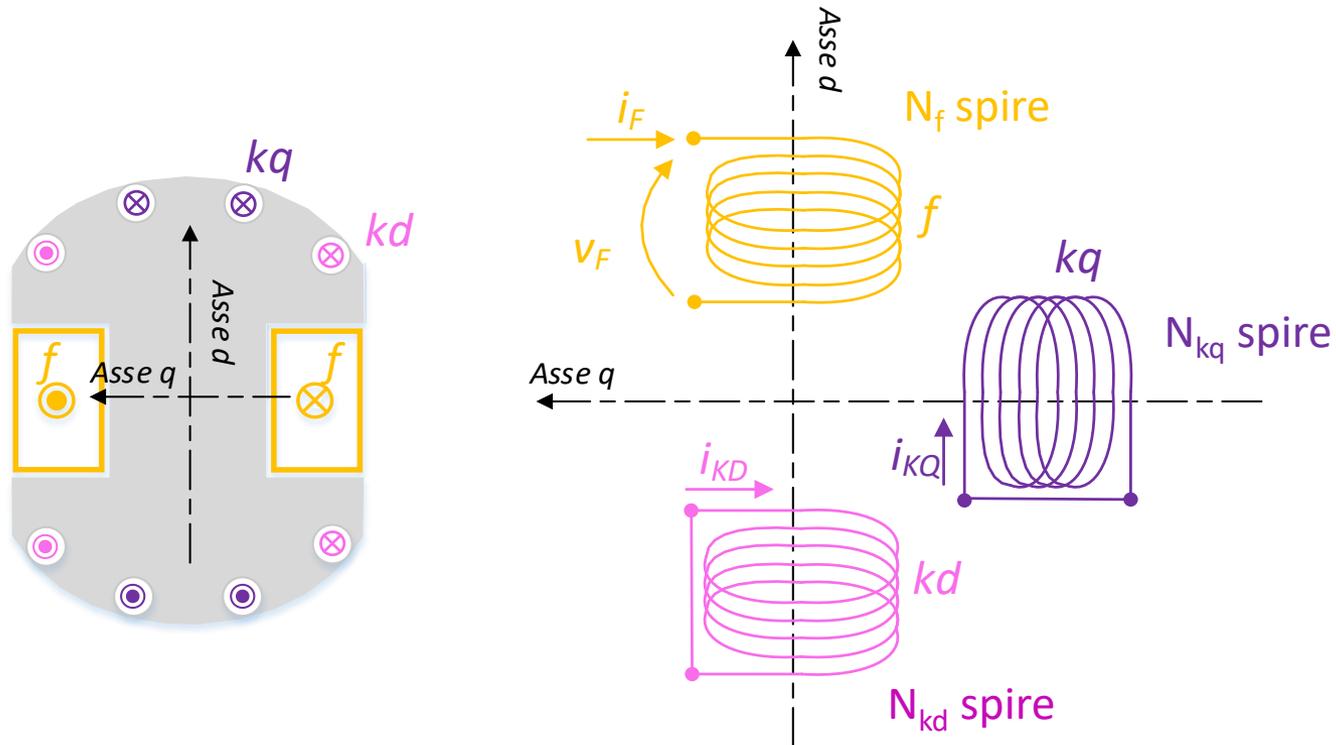


- Questa è la rappresentazione nel caso di rotore liscio. Si assumerà nel seguito la rappresentazione a poli salienti, ma tutti i ragionamenti sono perfettamente applicabili al caso di poli lisci.

Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Avvolgimento di smorzamento

La gabbia di smorzamento viene modellizzata mediante due circuiti, uno agente sull'asse d (indicato come «KD») e uno agente sull'asse q (indicato come «KQ»)



Entrambi i circuiti «kd» e «kq» sono ovviamente rappresentabili come messi in corto circuito (nella gabbia vi sono solo correnti indotte, non tensioni di alimentazione).

Sull'asse d chiaramente è posto anche il circuito di eccitazione (indicato come «f») al quale è applicata una tensione v_f e attraverso il quale passa una corrente i_f .

Modello di macchina sincrona a rotore avvolto

Schema complessivo

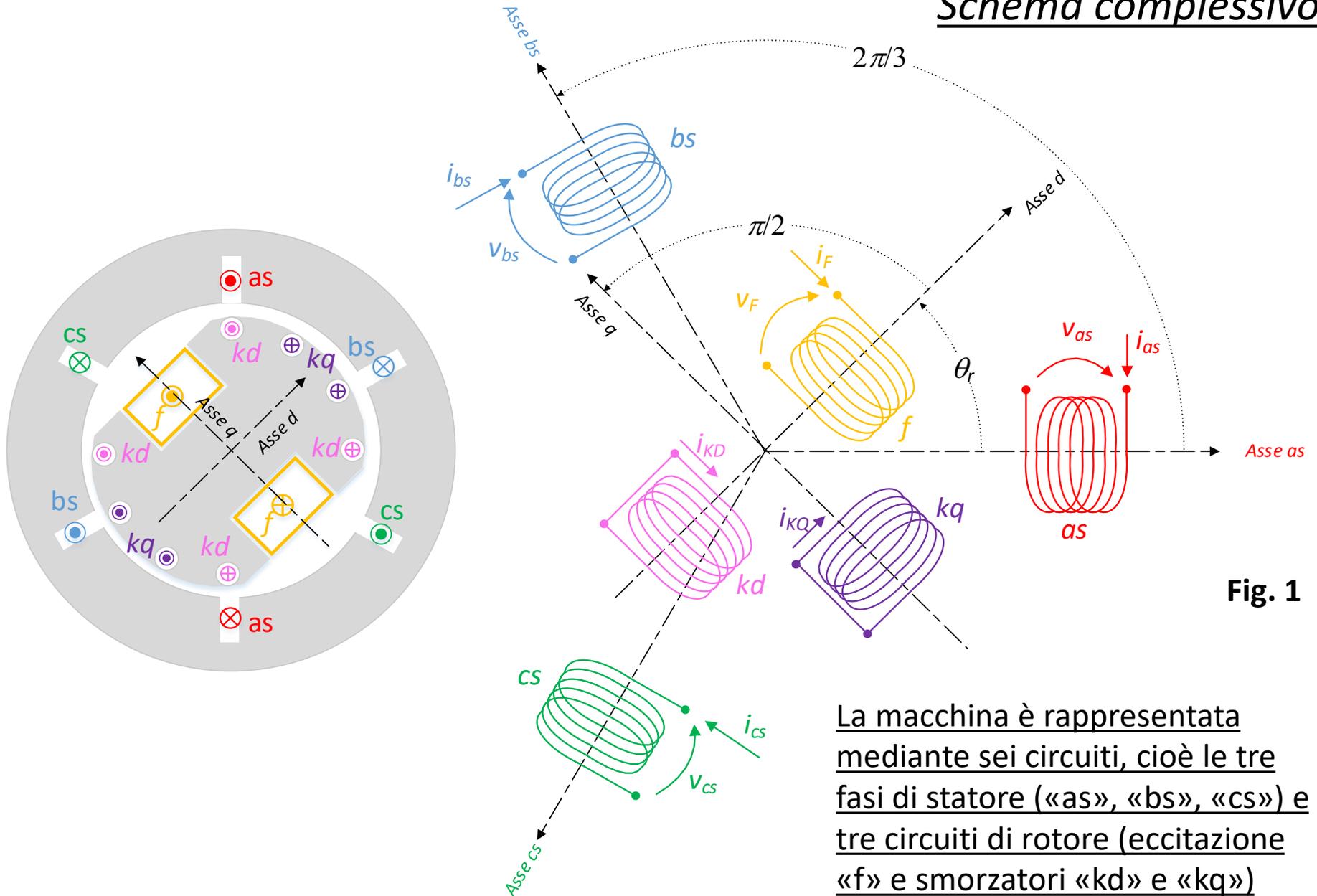


Fig. 1

La macchina è rappresentata mediante sei circuiti, cioè le tre fasi di statore («as», «bs», «cs») e tre circuiti di rotore (eccitazione «f» e smorzatori «kd» e «kq»)

Auto e mutui accoppiamenti magnetici

La macchina sincrona viene quindi modellizzata come un insieme di sei circuiti elettrici, tre fissi (fasi di statore), tre solidali col rotore.

Per procedere nella modellizzazione, serve determinare le auto e mutue induttanze per tale sistema di circuiti elettrici. Come visto nello studio del campo rotante, in una macchina a traferro non uniforme le auto e mutue induttanze dei circuiti elettrici dipendono, in generale, dalla posizione del rotore, che in questo caso è determinata dalla posizione θ_d dell'asse polare, ossia dell'asse d .

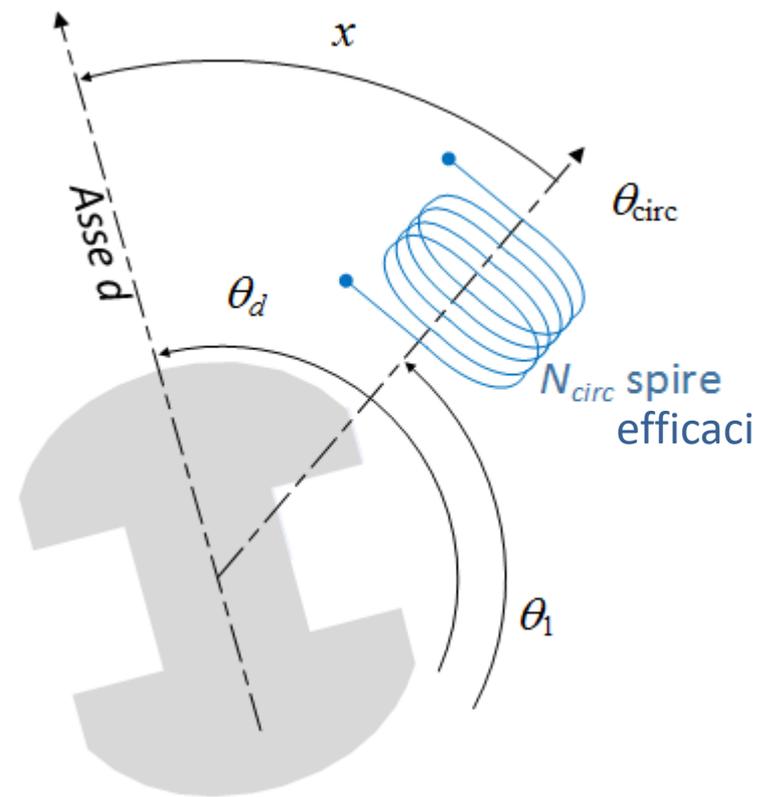
Prendiamo il caso di un generico circuito «circ» con N_{circ} spire, con asse di simmetria nella posizione θ_{circ} (radianti elettrici). Si è visto nella parte sul campo rotante che l'autoinduttanza «magnetizzante» di tale circuito si può scrivere come:

$$L_{m,circ}(x) = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_{circ}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2x) \right] \quad (20)$$

dove x è l'angolo, in radianti elettrici, compreso tra l'asse d (asse polare) e l'asse del circuito.

Inoltre:

$$g_0 \quad \text{traferro medio} \qquad g_0 + \frac{\Delta g}{2} \quad \text{traferro massimo} \qquad g_0 - \frac{\Delta g}{2} \quad \text{traferro minimo}$$



Quindi la (20) si può scrivere:

$$L_{circ,m}(\theta_d) = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_{circ}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2(\theta_{circ} - \theta_d)) \right] \quad (21)$$

In realtà l'autoinduttanza del generico circuito preso in considerazione deve tenere in conto non solo il flusso prodotto al traferro, ma anche i flussi di «dispersione», cioè quelli concatenati col circuito ma che non interessano il traferro. Di questi si tiene conto con l'«induttanza di dispersione» $L_{\sigma,circ}$

$$L_{circ}(\theta_d) = L_{\sigma,circ} + L_{m,circ}(\theta_d) = L_{\sigma,circ} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_{circ}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2(\theta_d - \theta_{circ})) \right] \quad (22)$$

Si nota che l'induttanza di dispersione, essendo dovuta a flussi che non attraversano il traferro, si assume non dipendente dalla posizione del rotore e, quindi, costante.

AUTOINDUTTAZA DELLE FASI DI STATORE

Si applichi la (22) al caso delle tre fasi di statore (Fig. 1: posizioni θ_{circ} pari a 0, $2\pi/3$ e $4\pi/3$)

$$\begin{aligned} L_{as}(\theta_d) &= L_{\sigma s} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2(\theta_d)) \right] \\ L_{bs}(\theta_d) &= L_{\sigma s} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(2\left(\theta_d - \frac{2}{3}\pi\right)\right) \right] \\ L_{cs}(\theta_d) &= L_{\sigma s} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(2\left(\theta_d - \frac{4}{3}\pi\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Dove $L_{\sigma s}$ è l'induttanza di dispersione di fase di statore (uguale per tutte le fasi essendo esse identiche).

Per semplicità introduciamo le seguenti definizioni:

$$L_{md} \triangleq_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s{}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \quad (24) \quad \text{INDUTTANZA MAGNETIZZANTE DI ASSE DIRETTO}$$

$$L_{mq} \triangleq_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s{}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} - \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \quad (25) \quad \text{INDUTTANZA MAGNETIZZANTE DI ASSE IN QUADRATURA}$$

Significato fisico (direttamente deducibile dalla (22)):

Fig. 3

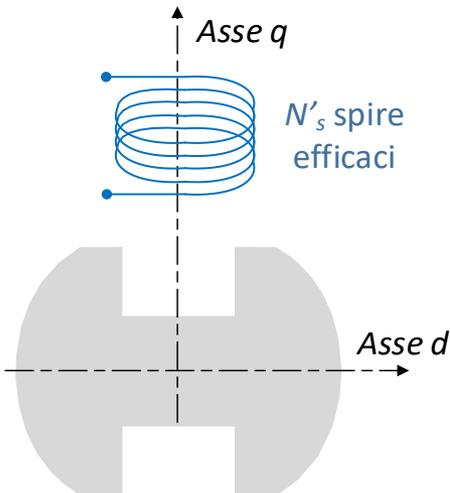
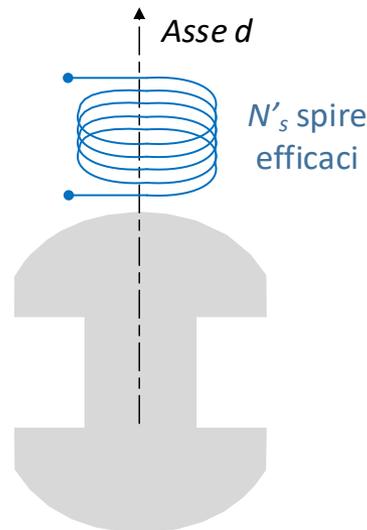


Fig. 2



Significato fisico [direttamente deducibile dalla (22)]:

L_{md} è l'autoinduttanza di magnetizzazione di una fase di statore quando il rotore (asse d) è allineato con l'asse della fase stessa (Fig. 2).

L_{mq} è l'autoinduttanza di magnetizzazione di una fase di statore quando il rotore (asse d) è in quadratura (cioè spostato di $\pi/2$ radianti elettrici) rispetto all'asse della fase stessa (Fig. 3).

In base a (24) e (25), è possibile riscrivere le (23) come segue:

$$\begin{aligned}
 L_{as}(\theta_d) &= L_{\sigma_s} + \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos(2(\theta_d)) \\
 L_{bs}(\theta_d) &= L_{\sigma_s} + \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos\left(2\left(\theta_d - \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
 L_{cs}(\theta_d) &= L_{\sigma_s} + \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos\left(2\left(\theta_d - \frac{4}{3}\pi\right)\right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

AUTOINDUTTAZA DEL CIRCUITO DI ECCITAZIONE E DELLO SMORZATORE DI ASSE DIRETTO

In base alle stesse considerazioni fatte per le fasi di statore e considerando che il circuito di eccitazione e lo smorzatore di asse diretto (f e kd , Fig. 1) sono sempre allineato con l'asse d [$\theta_{\text{circ}} = \theta_d$ in (20)], l'autoinduttanza di tali circuiti si può scrivere come:

$$\text{Circuito di eccitazione} \quad L_F = L_{\sigma F} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_f'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \tag{27}$$

$$\text{Smorzatore su asse } d \quad L_{KD} = L_{\sigma KD} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_{kd}'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \tag{28}$$

Considerando la (24) le precedenti si possono scrivere:

$$L_F = L_{\sigma F} + L_{md} \frac{N_f'^2}{N_s'^2} \tag{29}$$

$$L_{KD} = L_{\sigma KD} + L_{md} \frac{N_{kd}'^2}{N_s'^2} \tag{30}$$

AUTOINDUTTAZZA DEL CIRCUITO DELLO SMORZATORE DI ASSE Q

In base alle stesse considerazioni fatte per le fasi di statore e considerando che lo smorzatore di asse q (kq , Fig. 1) è sempre allineato con l'asse q [$\theta_{\text{circ}} = \theta_q$ in (20)], l'autoinduttanza di tale circuito si può scrivere come:

$$L_{KQ} = L_{\sigma KQ} + \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_{kq}{}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} - \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \quad (31)$$

Considerando la (25) la precedente si può scrivere:

$$L_{KQ} = L_{\sigma KQ} + \frac{N'_{kq}{}^2}{N'_s{}^2} L_{mq} \quad (32)$$

Si sono finora viste le autoinduttanze dei sei circuiti di macchina. Riguardo le mutue induttanze, si consideri la generica situazione di Fig. 4.

Vi sono due generici circuiti «1» e «2», in posizione angolare θ_1 e θ_2 , quindi sfasati di $\gamma = \theta_1 - \theta_2$ radianti elettrici, dotati rispettivamente di N_1 e N_2 spire efficaci, con rotore posto con asse diretto in posizione θ_d . Sia «b» la bisettrice tra gli assi dei due circuiti, posta quindi in posizione $(\theta_1 + \theta_2)/2$.

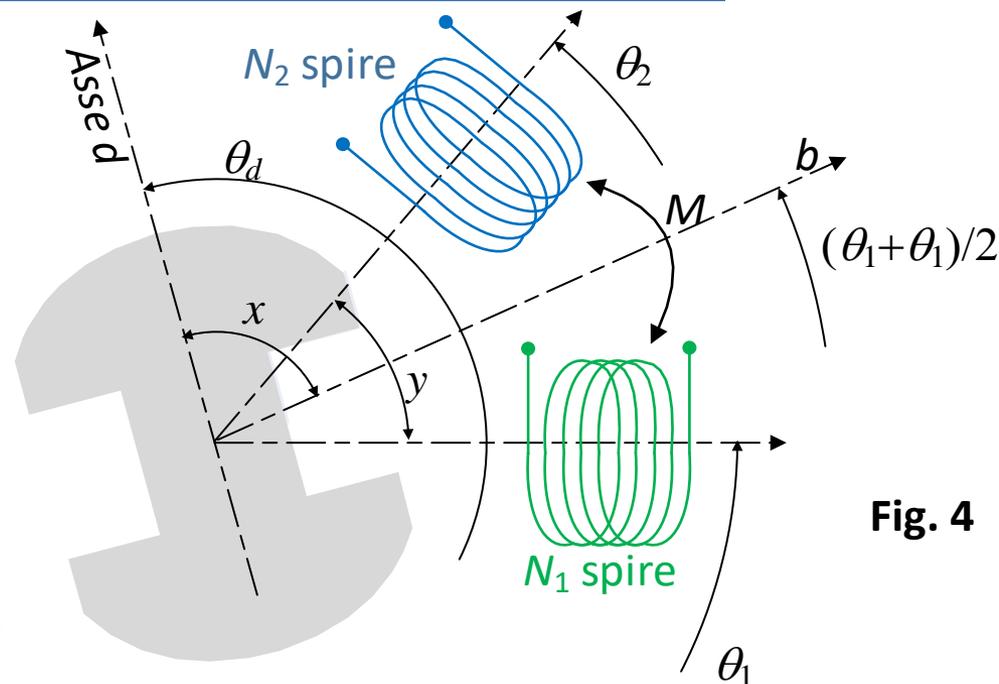


Fig. 4

Si è dimostrato, studiando il campo rotante, che la mutua induttanza M tra i due circuiti è funzione periodica con periodo pari a π radianti elettrici ed è massima quando il rotore si trova con l'asse d allineato con la bisettrice b , cioè

$$M(x) = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_1 N_2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos(y) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2x) \right] \quad (33)$$

dove (Fig. 4):

$$x = \theta_d - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad y = \theta_2 - \theta_1 \quad (34)$$

Quindi si ha:

$$M(\theta_d) = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_1 N_2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(2\left(\theta_d - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) \right] \quad (35)$$

Si nota che viene evidenziata solo la dipendenza da θ_d in quanto θ_1 e θ_2 sono delle costanti.

MUTUE INDUTTANZE TRA FASI DI STATORE

Applicando la (35) alle fasi di statore (Fig. 1) si ottiene:

$$\begin{aligned} M_{as,bs}(\theta_r) = M_{bs,as}(\theta_r) &= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2\theta_r\right) \right] \\ M_{as,cs}(\theta_r) = M_{cs,as}(\theta_r) &= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(\frac{4}{3}\pi - 2\theta_r\right) \right] \\ M_{bs,cs}(\theta_r) = M_{cs,bs}(\theta_r) &= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2\theta_r) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

In base alle definizioni (24) e (25), si ha:

$$\frac{L_{md} + L_{mq}}{2} = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_s'^2}{p^2} \frac{1}{g_0} \quad \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_1 N_2}{p^2} \frac{\Delta g}{2g_0^2} \quad (37)$$

e usando queste si possono riscrivere le (36) come:

$$\begin{aligned} M_{as,bs}(\theta_r) &= M_{bs,as}(\theta_r) = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2\theta_r\right) \\ M_{as,cs}(\theta_r) &= M_{cs,as}(\theta_r) = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos\left(\frac{4}{3}\pi - 2\theta_r\right) \\ M_{bs,cs}(\theta_r) &= M_{cs,bs}(\theta_r) = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{L_{md} - L_{mq}}{2} \cos(2\theta_r) \end{aligned} \quad (38)$$

MUTUE INDUTTANZE TRA FASI DI STATORE E CIRCUITI DI ROTORE

Esaminiamo per dimostrazione solo il caso della mutua induttanza tra fase a di statore «as» e circuito di eccitazione «f» e poi tra la stessa fase «as» e lo smorzatore «kq» di asse q.

Applichiamo la (35) al caso in cui il circuito «1» sia la fase «as» e il circuito «2» sia il circuito di eccitazione «f». Allora:

$$\begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \theta_d \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \theta_2 - \theta_1 = \theta_d \\ 2\left(\theta_d - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 2\left(\theta_d - \frac{0 + \theta_d}{2}\right) = \theta_d \end{array}$$

per cui la (35) diventa:

$$\begin{aligned}
M_{as,F}(\theta_d) &= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s N'_f}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos(\theta_d) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(\theta_d) \right] = \\
&= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s N'_f}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \cos(\theta_d) = L_{md} \frac{N'_f}{N'_s} \cos(\theta_d)
\end{aligned} \tag{39}$$

Applichiamo ora la (35) al caso in cui il circuito «1» sia la fase «as» e il circuito «2» sia il circuito di smorzamento di asse q «kq». Allora:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 0 & \theta_2 - \theta_1 &= \theta_d + \frac{\pi}{2} \\
\theta_2 &= \theta_q = \theta_d + \frac{\pi}{2} & \xrightarrow{\quad} & 2\left(\theta_d - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 2\left(\theta_d - \frac{0 + \theta_d + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \theta_d - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

per cui la (35) diventa:

$$\begin{aligned}
M_{as,KQ}(\theta_d) &= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s N'_{kq}}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos\left(\theta_d + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos\left(\theta_d - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\
&= \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s N'_{kq}}{p^2} \left[-\frac{1}{g_0} \sin(\theta_d) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \sin(\theta_d) \right] \\
&= -\mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_s N'_{kq}}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} - \frac{\Delta g}{2g_0^2} \right] \sin(\theta_d) = -L_{mq} \frac{N'_{kq}}{N'_s} \sin(\theta_d)
\end{aligned} \tag{40}$$

Con identica procedura, si dimostrano le formule che danno la mutua induttanza tra le tutte le fasi di statore e i circuiti di rotore. Di seguito si riportano i risultati:

$$\begin{aligned}
M_{as,F}(\theta_r) &= M_{F,as}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_f}{N'_s} \cos(\theta_r) \\
M_{bs,F}(\theta_r) &= M_{F,bs}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_f}{N'_s} \cos\left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) \\
M_{cs,F}(\theta_r) &= M_{F,cs}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_f}{N'_s} \cos\left(\theta_r - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{aligned}
\tag{41}$$

$$\begin{aligned}
M_{as,KD}(\theta_r) &= M_{KD,as}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_{kd}}{N'_s} \cos(\theta_r) \\
M_{bs,KD}(\theta_r) &= M_{KD,bs}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_{kd}}{N'_s} \cos\left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) \\
M_{cs,KD}(\theta_r) &= M_{KD,cs}(\theta_r) = L_{md} \frac{N'_{kd}}{N'_s} \cos\left(\theta_r - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{aligned}
\tag{42}$$

$$\begin{aligned}
M_{as,KQ}(\theta_r) &= M_{KQ,as}(\theta_r) = -\frac{N'_{kq}}{N'_s} L_{mq} \sin(\theta_r) \\
M_{bs,KQ}(\theta_r) &= M_{KQ,bs}(\theta_r) = \frac{N'_{kq}}{N'_s} L_{mq} \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta_r\right) \\
M_{cs,KQ}(\theta_r) &= M_{KQ,cs}(\theta_r) = \frac{N'_{kq}}{N'_s} L_{mq} \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta_r\right)
\end{aligned}
\tag{43}$$

MUTUA INDUTTANZA TRA CIRCUITI DI ROTORE

Campo e smorzatore di asse d si trovano sullo stesso asse. Quindi, nella (35), si ha:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_d$$

Ne consegue:

$$M_{F,KD} = M_{KD,F} = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N'_f N'_{kd}}{p^2} \frac{1}{g_0} = \frac{N'_f N'_{kd}}{N'_s{}^2} L_{md} \quad (44)$$

Per quanto riguarda la mutua induttanza tra smorzatore di asse q da un lato e campo e smorzatore di asse d dall'altra, si ha nella (35):

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_1 = \theta_d$$

Ne consegue:

$$M_{F,KQ} = M_{KQ,F} = M_{KD,KQ} = M_{KQ,KD} = 0 \quad (45)$$

Modello di macchina con variabili «fisiche» su statore e rotore

Riuniamo nella forma di vettori le tensioni, gradezze e flussi concatenati dei sei circuiti di macchina. Tali vettori sono indicati con apice «abc» per significare che le grandezze di statore sono espresse come grandezze fisiche «di fase» (a, b, c, appunto).

$$\begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ v_{KD} \\ v_{KQ} \\ v_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ v_F \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Gli smorzatori} \\ \text{sono in c.c.} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \\ i_F \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{KD} \\ \lambda_{KQ} \\ \lambda_F \end{pmatrix} \quad (46)$$

La legge di Faraday Lenz, applicata a tutti i circuiti di macchina, dà:

$$\begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ 0 \\ 0 \\ v_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{KD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{KQ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \\ i_F \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{KD} \\ \lambda_{KQ} \\ \lambda_F \end{pmatrix} \quad (47)$$

Inoltre, in base alle auto e mutue induttanze trovate, il legame flussi-correnti è:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{KD} \\ \lambda_{KQ} \\ \lambda_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{as}(\theta_d) & M_{as,bs}(\theta_d) & M_{as,cs}(\theta_d) & M_{as,KD}(\theta_d) & M_{as,KD}(\theta_d) & M_{as,F}(\theta_d) \\ M_{bs,as}(\theta_d) & L_{bs}(\theta_d) & M_{bs,cs}(\theta_d) & M_{bs,KD}(\theta_d) & M_{bs,KQ}(\theta_d) & M_{bs,F}(\theta_d) \\ M_{cs,as}(\theta_d) & M_{cs,bs}(\theta_d) & L_{cs}(\theta_d) & M_{cs,KD}(\theta_d) & M_{cs,KQ}(\theta_d) & M_{cs,F}(\theta_d) \\ \hline M_{KD,as}(\theta_d) & M_{KD,bs}(\theta_d) & M_{KD,cs}(\theta_d) & L_{KD} & 0 & M_{KD,F} \\ M_{KQ,as}(\theta_d) & M_{KQ,bs}(\theta_d) & M_{KQ,cs}(\theta_d) & 0 & L_{KQ} & 0 \\ M_{F,as}(\theta_d) & M_{F,bs}(\theta_d) & M_{F,cs}(\theta_d) & M_{F,KD} & 0 & L_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \\ i_F \end{pmatrix} \quad (48)$$

dove le auto e mutue induttanze sono quelle appena determinate.

Una prima semplificazione del modello (47)-(48) è – esattamente come visto per la macchina asincrona – il riporto delle grandezze di rotore a statore.

Modello di macchina con variabili «fisiche» su statore e grandezze di rotore riportate a statore

Per effettuare il riporto allo statore delle grandezze rotoriche, Introduciamo ora i seguenti coefficienti di riporto a statore delle grandezze rotoriche:

$$\begin{aligned} m_{kd} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N'_s}{N'_{kd}} \\ m_{kq} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N'_s}{N'_{kq}} \\ m_f &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N'_s}{N'_f} \end{aligned} \quad (49)$$

Introducendo tali coefficienti, le (47) e (48) si possono scrivere equivalentemente come:

$$\begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ \hline 0 \\ 0 \\ v_F m_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{KD} m_{kd}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & R_{KQ} m_{kq}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & R_F m_f^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ \hline i_{KD} / m_{kd} \\ i_{KQ} / m_{kq} \\ i_F / m_f \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \hline \lambda_{KD} m_{kd} \\ \lambda_{KQ} m_{kq} \\ \lambda_F m_f \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{KD} m_{kd} \\ \lambda_{KQ} m_{kq} \\ \lambda_F m_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{as} & M_{as,bs} & M_{as,cs} & \vdots & M_{as,KD} m_{kd} & M_{as,KQ} m_{kq} & M_{as,F} m_f \\ M_{bs,as} & L_{bs} & M_{bs,cs} & \vdots & M_{bs,KD} m_{kd} & M_{bs,KQ} m_{kq} & M_{bs,F} m_f \\ M_{cs,as} & M_{cs,bs} & L_{cs} & \vdots & M_{cs,KD} m_{kd} & M_{cs,KQ} m_{kq} & M_{cs,F} m_f \\ \hline M_{KD,as} & M_{KD,bs} & M_{KD,cs} & L_{KD} m_{kd}^2 & 0 & 0 & M_{KD,F} m_f m_{kd} \\ M_{KQ,as} & M_{KQ,bs} & M_{KQ,cs} & \vdots & 0 & L_{KQ} m_{kq}^2 & 0 \\ M_{F,as} & M_{F,bs} & M_{F,cs} & \vdots & M_{F,KD} m_f m_{kd} & 0 & L_F m_f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ \hline i_{KD} / m_{kd} \\ i_{KQ} / m_{kq} \\ i_F / m_f \end{pmatrix} \quad (51)$$

In base a questi coefficienti, definiamo le grandezze di rotore riportate allo statore. Per comodità di notazione, le grandezze di rotore riportate allo statore saranno indicate non con un apice (come fatto per le macchine asincrone) ma usando indici minuscoli, cioè «kd», «kq» ed «f» al posto di «KD», «KQ» e «F»:

$$v_{kd} \triangleq v_{KD} m_{kd} = 0$$

$$v_{kq} \triangleq v_{KQ} m_{kq} = 0 \quad (52)$$

$$\lambda_{kd} \triangleq \lambda_{KD} m_{kd}$$

$$\lambda_{kq} \triangleq \lambda_{KQ} m_{kq} \quad (53)$$

$$i_{kd} \triangleq i_{KD} / m_{kd}$$

$$i_{kq} \triangleq i_{KQ} / m_{kq} \quad (54)$$

$$v_f \triangleq v_F m_f$$

$$\lambda_f \triangleq \lambda_F m_f$$

$$i_f \triangleq i_F / m_f$$

$$\begin{aligned}
M_{as,f}(\theta_d) &= M_{f,as}(\theta_d) = M_{F,as}(\theta_d)m_f = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos(\theta_d) \\
M_{bs,f}(\theta_d) &= M_{f,bs}(\theta_d) = M_{f,bs}(\theta_d)m_f = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos\left(\theta_d - \frac{2}{3}\pi\right) \\
M_{cs,f}(\theta_d) &= M_{f,cs}(\theta_d) = M_{F,bs}(\theta_d)m_f = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos\left(\theta_d - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
M_{as,kd}(\theta_d) &= M_{kd,as}(\theta_d) = M_{KD,as}(\theta_d)m_{kd} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos(\theta_d) \\
M_{bs,kd}(\theta_d) &= M_{kd,bs}(\theta_d) = M_{KD,bs}(\theta_d)m_{kd} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos\left(\theta_d - \frac{2}{3}\pi\right) \\
M_{cs,kd}(\theta_d) &= M_{kd,cs}(\theta_d) = M_{kd,cs}(\theta_d)m_{kd} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{md} \cos\left(\theta_d - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
M_{as,kq}(\theta_d) &= M_{kq,as}(\theta_d) = M_{KQ,as}(\theta_d)m_{kq} = -\sqrt{\frac{3}{2}}L_{mq} \sin(\theta_d) \\
M_{bs,kq}(\theta_d) &= M_{kq,bs}(\theta_d) = M_{KQ,bs}(\theta_d)m_{kq} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{mq} \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta_d\right) \\
M_{cs,kq}(\theta_d) &= M_{kq,cs}(\theta_d) = M_{KQ,cs}(\theta_d)m_{kq} = \sqrt{\frac{3}{2}}L_{mq} \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta_d\right)
\end{aligned} \tag{57}$$

NB: con il riporto a statore, tutte le mutue induttanze vengono a dipendere dalla sola L_{md} .

$$L_{kd} = L_{KD} m_{kd}^2 = L_{\sigma kd} + \frac{3}{2} L_{md}$$

$$L_{kq} = L_{KQ} m_{kq}^2 = L_{\sigma kq} + \frac{3}{2} L_{mq} \quad (58)$$

$$L_f = L_F m_f^2 = L_{\sigma f} + \frac{3}{2} L_{md}$$

$$\left(\begin{array}{l} L_{\sigma kd} = L_{\sigma KD} m_{kd}^2 \\ L_{\sigma kq} = L_{\sigma KQ} m_{kq}^2 \\ L_{\sigma f} = L_{\sigma F} m_f^2 \end{array} \right)$$

Induttanze di dispersione dei circuiti di rotore riportate a statore

$$M_{kd,f} = M_{f,kd} = M_{kD,F} m_f m_{kd} = \frac{3}{2} L_{md} \quad (59)$$

Grazie al riporto delle grandezze rotoriche allo statore, la relazione (46) tra flussi e correnti si semplifica in termini di auto e mutue induttanze coinvolte. Si definisce allora la matrice delle induttanze:

Dopo il riporto a statore delle grandezze rotoriche, le equazioni (50) e (51) si possono scrivere in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{v}_{abc} = \begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ v_{kd} \\ v_{kq} \\ v_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ 0 \\ 0 \\ v_f \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{i}_{abc} = \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{abc} = \begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{kd} \\ \lambda_{kq} \\ \lambda_f \end{pmatrix} \quad (63)$$

Riportate a statore

Vettori indicati con apice «abc» in quanto le grandezze di statore sono grandezze fisiche di fase (a, b, c appunto)
 Le grandezze di rotore (apice «f», «kd», «kq») sono riportate a statore

NB: l'equazione (64) implica l'adozione della «convenzione del motore»

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{R}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{abc} \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{abc} = \mathbf{L}_{abc} \mathbf{i}_{abc} \quad (65)$$

dove la matrice delle resistenze e delle induttanze sono:

$$\mathbf{L}_{abc}(\theta_d) = \begin{pmatrix} L_{as}(\theta_d) & M_{as,bs}(\theta_d) & M_{as,cs}(\theta_d) & M_{as,kd}(\theta_d) & M_{as,kq}(\theta_d) & M_{as,f}(\theta_d) \\ M_{bs,as}(\theta_d) & L_{bs}(\theta_d) & M_{bs,cs}(\theta_d) & M_{bs,kd}(\theta_d) & M_{bs,kq}(\theta_d) & M_{bs,f}(\theta_d) \\ M_{cs,as}(\theta_d) & M_{cs,bs}(\theta_d) & L_{cs}(\theta_d) & M_{cs,kd}(\theta_d) & M_{cs,kq}(\theta_d) & M_{cs,f}(\theta_d) \\ \hline M_{kd,as}(\theta_d) & M_{kd,bs}(\theta_d) & M_{kd,cs}(\theta_d) & L_{kd} & 0 & M_{kd,f} \\ M_{kq,as}(\theta_d) & M_{kq,bs}(\theta_d) & M_{kq,cs}(\theta_d) & 0 & L_{kq} & 0 \\ M_{f,as}(\theta_d) & M_{f,bs}(\theta_d) & M_{f,cs}(\theta_d) & M_{f,kd} & 0 & L_f \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{R}_{abc} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f \end{pmatrix} \quad (67)$$

Il modello in questa forma non è adatto ad essere usato agevolmente a in quanto la matrice delle induttanze (66) ha una dipendenza «complessa» rispetto alla posizione del rotore, cioè dell'asse d, dipendenza espressa dalle (55)-(57).

Per eliminare tale dipendenza, si applicherà, come fatto per le macchine asincrone, la trasformazione di Park-Clark. Nel caso delle macchine sincrone, tuttavia, la scelta dell'asse d non è «arbitraria» ma vincolata, in quanto l'asse d deve coincidere con l'asse polare.

Modello di macchina trasformato secondo Clarke-Park (cioè in variabili dq0)

Per trasformare il modello in variabili dq0, si osserva che le grandezze di rotore sono già intrinsecamente espresse in variabili dq in quanto i tre circuiti di rotore sono, per definizione, allineati lungo l'asse d (circuito di eccitazione «f» e smorzatore «kd») o lungo l'asse q (smorzatore «kq»).

TRASFORMATA DI PARK-CLARKE PER LE TRE FASI DI STATORE

Pertanto ciò che serve è trasformare secondo Park e Clarke solo le grandezze di fase di statore. Ciò può essere fatto applicando la trasformazione di Clarke-Park già vista, in cui però la scelta del sistema dq è vincolata dall'aver l'asse d coincidente con l'asse del rotore.

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(68)

$$\mathbf{P}(\theta_d) = \begin{pmatrix} \cos \theta_d & \sin \theta_d & 0 \\ -\sin \theta_d & \cos \theta_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(69)

Come visto trattando il campo rotante, la trasformazione complessiva dal sistema fisico di statore (fasi «a», «b», «c») a quello dq0 è dato dalla composizione delle due trasformazioni di Clarke (**C**) e Park (**P**)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3(\theta_r) = \mathbf{P}(\theta_r)\mathbf{C} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & 0 \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) \\ -\sin(\theta_r) & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

cosicchè le variabili di statore del sistema di riferimento dq0 sono definite da:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_3(\theta_r) &= \mathbf{P}(\theta_r)\mathbf{C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & 0 \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) \\ -\sin(\theta_r) & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \quad (43) \quad \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (44) \quad \begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (73)$$

dove il pedice «3» indica che la matrice è 3x3, cioè si applica alle 3 fasi di statore.

TRASFORMATA DI PARK-CLARKE COMPLESSIVA

Poichè i circuiti di macchina sono sei (tre fasi, il circuito di eccitazione e i due smorzatori), servirà definire una trasformazione che agisce su tutte e sei le variabili, trasformazione che sarà quindi rappresentata da una matrice \mathbf{T} 6x6. Come detto, poichè i circuiti di rotore sono già allineati lungo l'asse d o l'asse q, non sarà necessaria per esse nessuna trasformazione:

$$\mathbf{T}(\theta_r) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{T}_3(\theta_r) & & & \mathbf{0}_3 & & \\ \hline & & & \mathbf{0}_3 & & \\ & & & & \mathbf{I}_3 & \end{array} \right) =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\theta_r) & \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_r) & -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_r - \frac{4}{3}\pi) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (74)$$

Questa matrice identica
consente di preservare le
grandezze di rotore

La trasformazione \mathbf{T} agisce su tutte sei le variabili di macchina come segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}_{dq0} = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} &= \mathbf{T}(\theta_r) \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta_r) \mathbf{i}_{abc} & \quad \mathbf{v}_{dq0} = \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_{kd} \\ v_{kq} \\ v_f \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta_r) \begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ v_{kd} \\ v_{kq} \\ v_f \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta_r) \mathbf{v}_{abc} \\
 \boldsymbol{\lambda}_{dq0} = \begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \\ \lambda_{kd} \\ \lambda_{kq} \\ \lambda_f \end{pmatrix} &= \mathbf{T}(\theta_r) \begin{pmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{kd} \\ \lambda_{kq} \\ \lambda_f \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta_r) \boldsymbol{\lambda}_{abc} & \quad (75)
 \end{aligned}$$

E' facile dimostrare che \mathbf{T} è ortonormale, cioè:

$$\mathbf{T}(\theta_r) \mathbf{T}^t(\theta_r) = \mathbf{I}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

il che consente di passare dalle grandezze trasformate a quelle originarie usando la trasposta di \mathbf{T} :

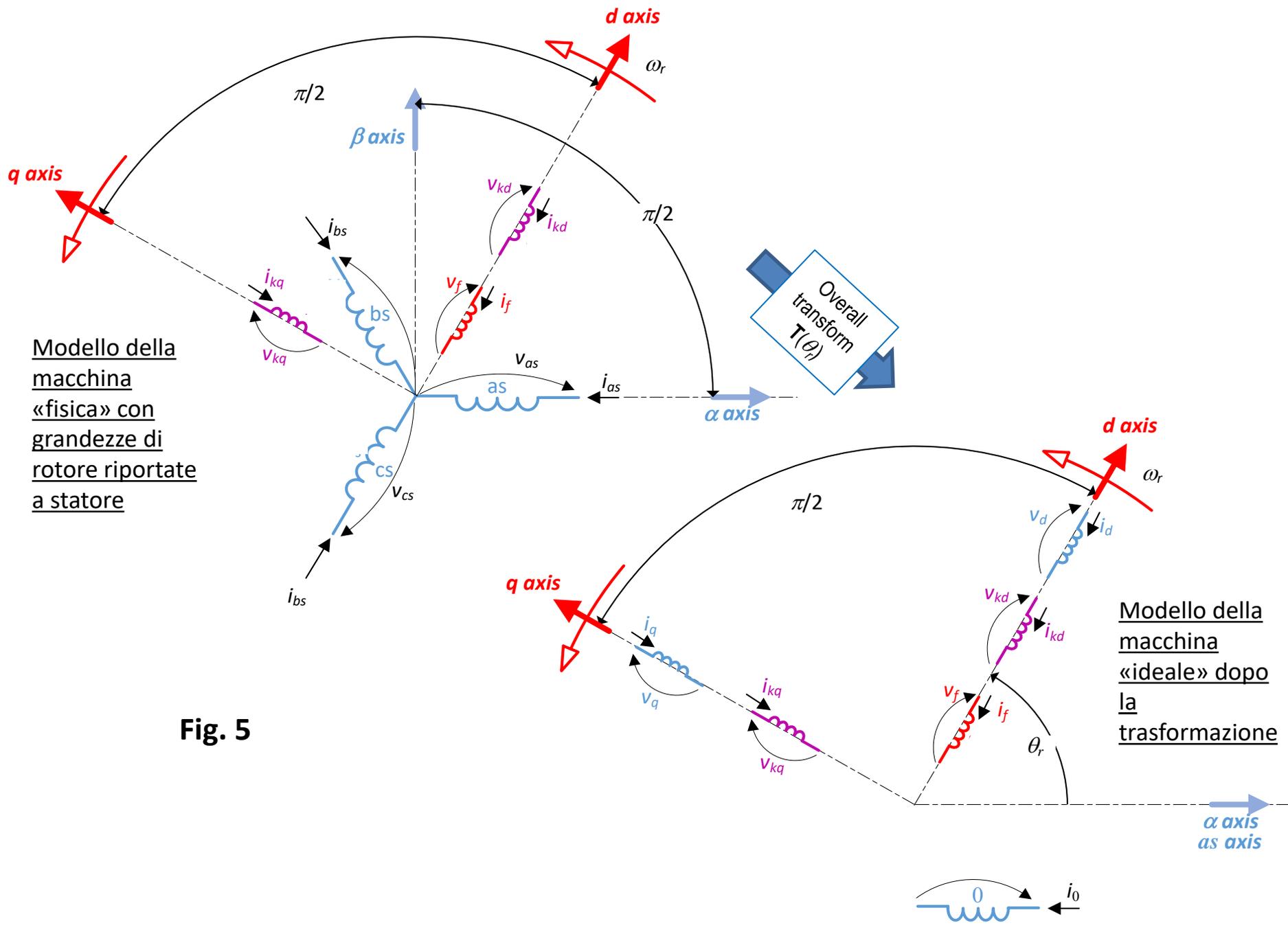
$$\mathbf{i}_{abc} = \mathbf{T}^t(\theta_r) \mathbf{i}_{dq0}$$

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{T}^t(\theta_r) \mathbf{v}_{dq0} \quad (77)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{abc} = \mathbf{T}^t(\theta_r) \boldsymbol{\lambda}_{dq0}$$

La struttura della macchina «ideale» ottenuta mediante la trasformazione \mathbf{T} è mostrata in fig. 5. Si vede che la macchina ideale comprende cinque tre circuiti lungo l'asse diretto, due lungo l'asse in quadratura e uno relativo alla componente omopolare.

Questo perchè le tre fasi di statore sono state trasformate in un circuito di asse d, in uno di asse q e in un circuito omopolare.



Modello della macchina «fisica» con grandezze di rotore riportate a statore

Fig. 5

Modello della macchina «ideale» dopo la trasformazione

Come già notato, essendo la matrice \mathbf{T} ortonormale, la corrispondente trasformazione è invariante rispetto alla potenza. Ciò significa che la potenza elettrica entrante nella macchina idealizzata è uguale alla potenza elettrica entrante nella macchina reale. Infatti:

Potenza entrante nella macchina reale

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{v_{as}i_{as} + v_{bs}i_{bs} + v_{cs}i_{cs} + v_{kd}i_{kd} + v_{kq}i_{kq} + v_f i_f} \\
 & = \begin{pmatrix} v_{as} & v_{bs} & v_{cs} & v_{kd} & v_{kq} & v_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{abc}^t \mathbf{i}_{abc} =
 \end{aligned} \tag{78}$$

$$= \left(\mathbf{T}^t(\theta_r) \mathbf{v}_{dq0} \right)^t \left(\mathbf{T}^t(\theta_r) \mathbf{i}_{dq0} \right) = \mathbf{v}_{dq0}^t \underbrace{\mathbf{T}(\theta_r) \mathbf{T}^t(\theta_r)}_{\mathbf{I}_6} \mathbf{i}_{dq0} =$$

$$= \mathbf{v}_{dq0}^t \mathbf{i}_{dq0} = \underbrace{v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 + v_{kd} i_{kd} + v_{kq} i_{kq} + v_f i_f}_{\text{Potenza entrante nella macchina ideale}}$$

Potenza entrante nella macchina ideale

TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE DELLE INDUTTANZE E DELLE RESISTENZE

Il motivo principale per cui si applica la trasformazione di Clarke-Park è di eliminare la dipendenza dalla posizione del rotore in tutte le auto e mutue induttanze dei circuiti di macchina [v. eq. (66)].

Infatti, applicando \mathbf{T} alla (65), si ha:

$$\begin{aligned}\lambda_{abc} &= \mathbf{T}^t(\theta_d)\lambda_{dq0} = \mathbf{L}_{abc}\mathbf{i}_{abc} = \mathbf{L}_{abc}(\theta_d)\mathbf{T}^t(\theta_d)\mathbf{i}_{dq0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{dq0} &= \underbrace{\mathbf{T}(\theta_d)\mathbf{L}_{abc}(\theta_d)\mathbf{T}^t(\theta_d)}_{\mathbf{L}_{dq0}}\mathbf{i}_{dq0} = \mathbf{L}_{dq0}\mathbf{i}_{dq0}\end{aligned}\quad (79)$$

dove si è introdotta la matrice delle induttanze trasformata (\mathbf{L}_{dq0}) definita come:

$$\mathbf{L}_{dq0} = \mathbf{T}(\theta_d)\mathbf{L}_{abc}(\theta_d)\mathbf{T}^t(\theta_d) \quad (80)$$

Sviluppando il prodotto (80) e considerando la struttura delle matrici (72) e (66), con auto e mutue induttanze date dalle (55), (56), (57), (58) e (59), si trova una matrice \mathbf{L}_{dq0} costante, cioè non dipendente da θ_d , la quale ha la seguente espressione:

$$\mathbf{L}_{dq0} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{mq} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma s} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma kd} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma kq} & 0 \\ \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma f} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Per quanto riguarda la matrice delle resistenze, si vede facilmente che essa si mantiene costante dopo la trasformazione, cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{dq0} &= \mathbf{T}(\theta_r) \mathbf{R}_{abc} \mathbf{T}^t(\theta_r) = \\ &= \mathbf{T}(\theta_r) \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f \end{pmatrix} \mathbf{T}^t(\theta_r) = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{abc} \quad (82) \end{aligned}$$

EQUAZIONI DINAMICHE IN VARIABILI dq0

Come fatto per le macchine asincrone, la trasformazione \mathbf{T} può essere applicata all'equazione che governa la dinamica elettrica, cioè alla (64). Usando le relazioni appena trovate, infatti, dalla (64) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{abc} &= \mathbf{R}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{abc} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(\theta_d) \mathbf{v}_{abc} = \mathbf{T}(\theta_d) \mathbf{R}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{T}(\theta_d) \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{abc} = \\
 &= \mathbf{v}_{dq0} = \underbrace{\mathbf{T}(\theta_d) \mathbf{R}_{abc} \mathbf{T}^t(\theta_d)}_{\mathbf{R}_{dq0}} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{T}(\theta_d) \frac{d}{dt} \left[\mathbf{T}^t(\theta_d) \boldsymbol{\lambda}_{dq0} \right] = \\
 &= \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \underbrace{\mathbf{T}(\theta_d) \frac{d}{dt} \left[\mathbf{T}^t(\theta_d) \right]}_{\omega_r \mathbf{J} \quad \textcircled{1}} \boldsymbol{\lambda}_{dq0} + \underbrace{\mathbf{T}(\theta_d) \mathbf{T}^t(\theta_d)}_{\mathbf{I}_6} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{dq0} = \\
 &= \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda}_{dq0} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_{dq0} = \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \frac{d}{dt} \left(\mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \right) = \\
 &= \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\mathbf{L}_{dq0} \right)}_{\mathbf{0}_6} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{dq0} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{i}_{dq0} \right) \\
 &= \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{dq0} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0}
 \end{aligned}$$

(83)

dove si è introdotta la matrice:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (84)$$

Velocità elettrica dell'asse d, ossia del rotore poichè si è scelto l'asse d coincidente con l'asse polare

$$\omega_r = \frac{d\theta_d}{dt} \quad (85)$$

Infatti, similmente a quanto visto per le macchine asincrone, il passaggio **1** in (83) si giustifica come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\theta_d) \frac{d}{dt} \left[\mathbf{T}^t(\theta_d) \right] &= \mathbf{T}(\theta_d) \frac{d\theta_d}{dt} \frac{d}{d\theta_d} \left[\mathbf{T}^t(\theta_d) \right] = \\ &= \omega_r \mathbf{T}(\theta_d) \frac{d}{d\theta_d} \left[\mathbf{T}^t(\theta_d) \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J} \end{aligned} \quad (86)$$

Quindi l'equazione della dinamica elettrica, in coordinate dq0, è:

$$\mathbf{v}_{dq0} = \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{dq0} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0} \quad (87)$$

$$\mathbf{L}_{dq0} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{mq} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma s} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma kd} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma kq} & 0 \\ \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma f} \end{pmatrix} \quad (87')$$

$$\mathbf{R}_{dq0} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f \end{pmatrix}$$

(87'')

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(87''')

Si nota che, grazie al riporto delle grandezze di rotore a statore e grazie alla trasformazione dq0, le equazioni dinamiche contengono matrici costanti e di struttura particolarmente semplice (diagonale a blocchi).

L'equazione dinamica in questa forma si presta quindi ad essere usata per la simulazione dinamica della macchina e /o per la sintesi del sistema di controllo.

L'EQUAZIONE DELLA COPPIA

Oltre alla dinamica elettrica, serve studiare anche la dinamica meccanica e, a tale scopo, serve un'equazione che dia la stima istantanea della coppia elettromagnetica sviluppata all'asse.

Il procedimento per ricavare l'equazione della coppia è formalmente identico a quello visto per le macchine asincrone.

Cioè:

L'energia magnetica immagazzinata nella macchina in un certo istante è (v. parte introduttiva):

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{abc}^t \mathbf{L}_{abc} \mathbf{i}_{abc} \quad (88)$$

e sappiamo (v. parte su campo rotante) che la coppia meccanica sviluppata all'asse si può esprimere e calcolare come:

$$T_m = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta_{rm}} \right|_{\mathbf{i}_{abc}=\text{cost}} \quad (89)$$

dove θ_{rm} è la posizione angolare meccanica del rotore, legata a quella elettrica θ_r da:

$$\theta_r = p\theta_{rm} \quad (90)$$

Quindi la (89) si può scrivere:

$$\begin{aligned} T_m &= \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta_{rm}} \right|_{\mathbf{i}_{abc}=\text{cost}} = \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta_{rm}} \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}_{abc}=\text{cost}} = p \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}_{abc}=\text{cost}} = \\ &= p \left[\frac{1}{2} \mathbf{i}_{abc} {}^t \mathbf{L}_{abc} \mathbf{i}_{abc} \right] \end{aligned} \quad (91)$$

Con passaggi formalmente identici a quelli visti per la macchina asincrona e considerando la (86), si arriva alla seguente espressione finale della coppia:

$$T_m = p \mathbf{i}_{dq0}^t \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \quad (92)$$

Si nota come l'equazione sia formalmente molto simile a quella trovata per le macchine asincrone, pur se con diverso significato dei simboli [\mathbf{L}_{dq0} data da (87'), \mathbf{J} data da (87'')].

Sviluppando il prodotto (92) e considerando la definizione delle matrici [\mathbf{L}_{dq0} data da (87'), \mathbf{J} data da (87'')] si arriva a dimostrare che la (92) può essere espressa in modo molto semplice come segue:

$$T_m = p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) i_d i_q + \frac{3}{2} L_{md} (i_f + i_{kd}) i_q - \frac{3}{2} L_{md} i_{kq} i_d \right] \quad (93)$$

EQUAZIONE DELLA DINAMICA MECCANICA

Nota l'espressione della coppia all'asse (93) e nota la coppia T_r prodotta dalla macchina accoppiata all'asse, la dinamica meccanica si può, come visto per le macchine asincrone e in corrente continua, esprimere come:

$$T_m - T_r = J \frac{d\omega_{rm}}{dt} + B\omega_{rm} = \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} + \frac{B}{p} \omega_r \quad (94)$$

essendo J il coefficiente di inerzia della linea d'asse (intero albero rotante), B il coefficiente di attrito viscoso (che tiene conto ad esempio delle perdite per attrito sui cuscinetti), ω_r la velocità angolare elettrica del rotore e ω_{rm} quella meccanica.

EQUAZIONE ELETTRICA IN FORMA DI STATO

Come visto per la macchina asincrona, l'equazione (87) può essere scritta in forma di stato, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (95)$$

scegliendo le sei correnti di macchina nel riferimento dq0 come vettore di stato \mathbf{x} e di uscita \mathbf{y} , per cui da (87) si ha direttamente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{i}_{dq0} = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{L}_{dq0}^{-1} \left[\mathbf{R}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \right] \\ \mathbf{B} &= \mathbf{L}_{dq0}^{-1} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{I}_6 \end{aligned} \quad (96)$$

Attraverso questa equazione di stato, è possibile rappresentare e studiare la dinamica della macchina nella forma di uno schema a blocchi del tutto analogo a quello visto per le macchine asincrone, cioè come in Fig. 6.

Si nota che lo schema a blocchi è addirittura più semplice in quanto, mentre per la macchina asincrona c'è la possibilità di scegliere la posizione e velocità dell'asse d, per la modellizzazione della macchina sincrona l'asse d deve coincidere con l'asse polare.

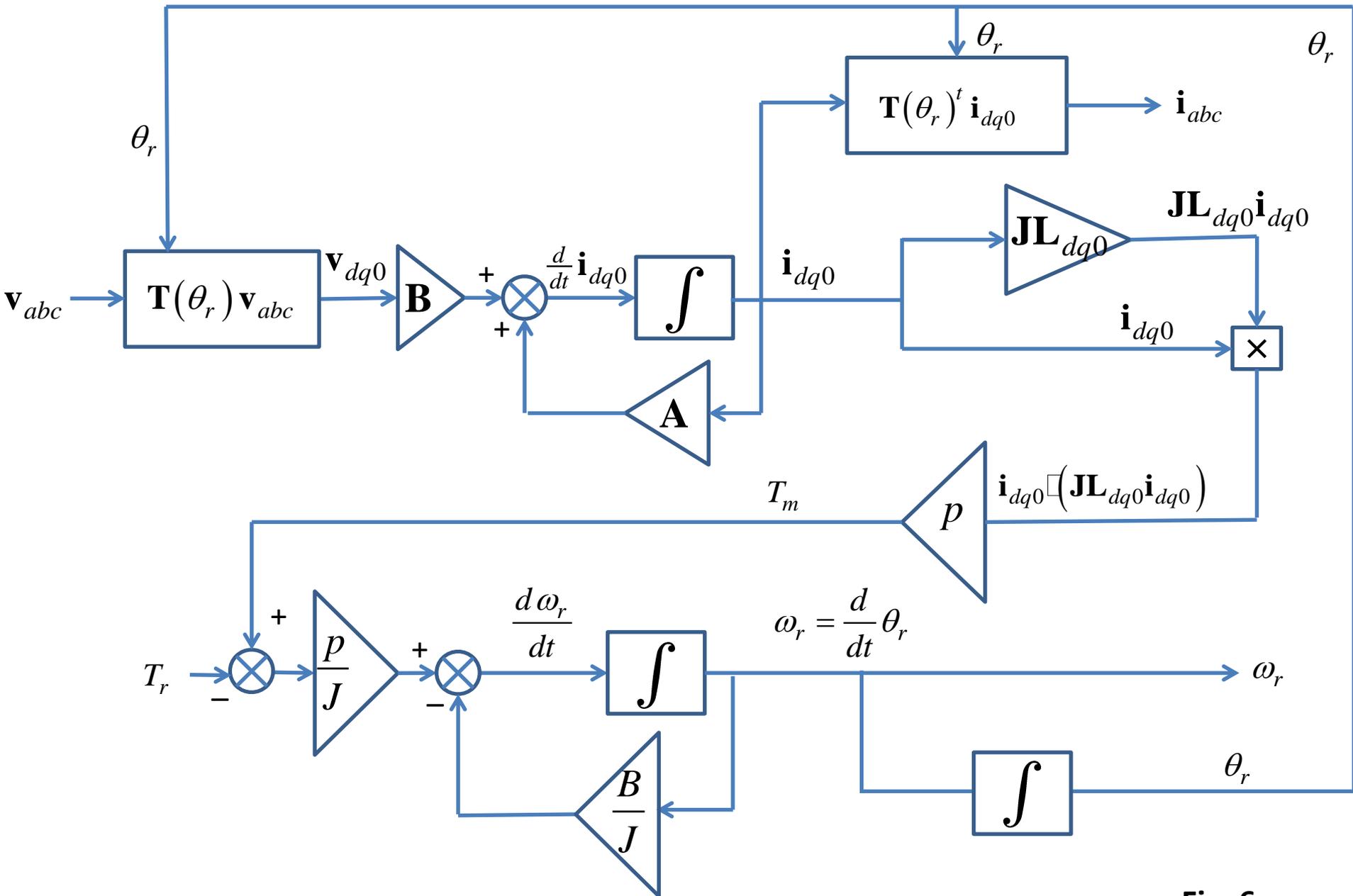


Fig. 6

CIRCUITO EQUIVALENTE IN REGIME DINAMICO

Come per la macchina asincrona, la dinamica elettrica della macchina può essere anche rappresentata nella forma di circuito equivalente.

A tale scopo, l'equazione matriciale (87) può essere scritta esplicitando le matrici secondo (87'),(87'') e (87'''). Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma s} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma kd} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma kq} & 0 \\ \frac{3}{2} L_{md} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma f} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} + \\
 &+ \omega_r \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}\right) & 0 & 0 & -\frac{3}{2} L_{mq} & 0 \\ \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} & 0 & 0 & \frac{3}{2} L_{md} & 0 & \frac{3}{2} L_{md} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_f \end{pmatrix} \quad (97)
 \end{aligned}$$

La (97) è equivalente al seguente sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases}
 v_d = R_s i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_f - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}\right) i_q - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq}\right) i_{kq} \\
 v_q = R_s i_q + \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}\right) \frac{d}{dt} i_q + \left(\frac{3}{2} L_{mq}\right) \frac{d}{dt} i_{kq} + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) i_d + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq}\right) i_{kq} + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq}\right) i_f \\
 v_0 = R_s i_0 + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_0 \\
 0 = R_{kd} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma kd}\right) \frac{d}{dt} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_f \\
 0 = R_{kq} i_{kq} + \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma kq}\right) \frac{d}{dt} i_{kq} + \left(\frac{3}{2} L_{mq}\right) \frac{d}{dt} i_q \\
 v_f = R_f i_f + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma f}\right) \frac{d}{dt} i_f + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md}\right) \frac{d}{dt} i_{kd}
 \end{cases} \quad (98)$$

con i flussi concatenati dati da:

$$\begin{cases}
 \lambda_d = \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) i_d + \frac{3}{2} L_{md} (i_{kd} + i_f) \\
 \lambda_q = \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}\right) i_q + \frac{3}{2} L_{mq} i_{kq}
 \end{cases} \quad (99)$$

Sostituendo (100) in (99) si ottiene:

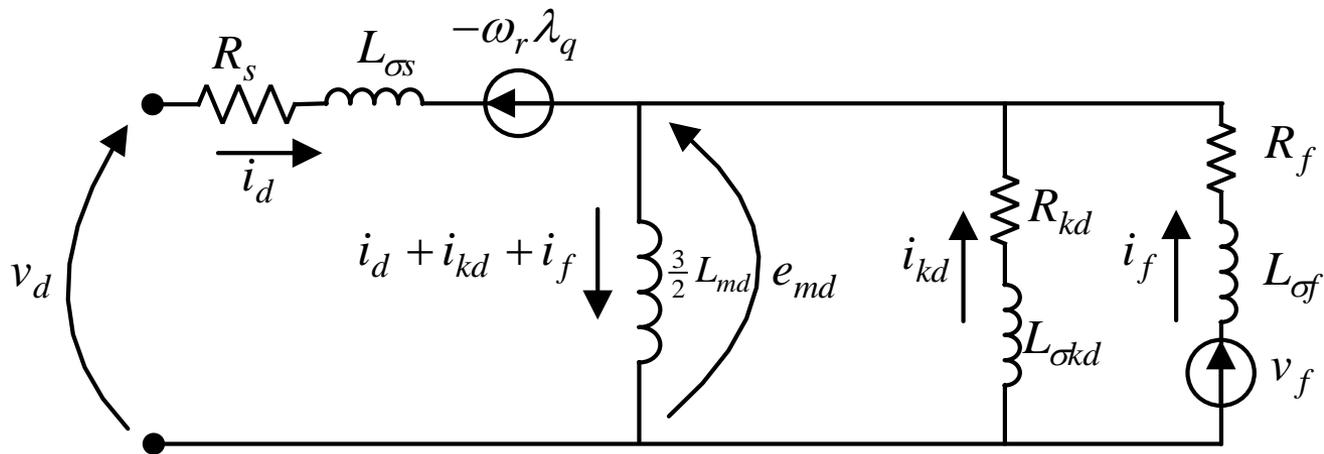
$$\left\{ \begin{array}{l}
v_d = R_s i_d + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_d + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} (i_d + i_{kd} + i_f)}_{e_{md}} - \omega_r \left[\underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) i_q}_{\lambda_q} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) i_{kq}}_{\lambda_d} \right] \\
v_q = R_s i_q + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_q + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) \frac{d}{dt} (i_q + i_{kq})}_{e_{mq}} + \omega_r \left[\underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) i_f}_{\lambda_d} \right] \\
v_0 = R_s i_0 + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_0 \\
0 = R_{kd} i_{kd} + L_{\sigma kd} \frac{d}{dt} i_{kd} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} (i_d + i_{kd} + i_{fd})}_{e_{md}} \\
0 = R_{kq} i_{kq} + L_{\sigma kq} \frac{d}{dt} i_{kq} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) \frac{d}{dt} (i_q + i_{kq})}_{e_{mq}} \\
v_f = R_f i_f + L_{\sigma f} \frac{d}{dt} i_f + \underbrace{\left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} (i_d + i_{kd} + i_f)}_{e_{md}}
\end{array} \right. \quad (100)$$

dove si sono definite le f.e.m. prodotte nei circuiti d e q di statore:

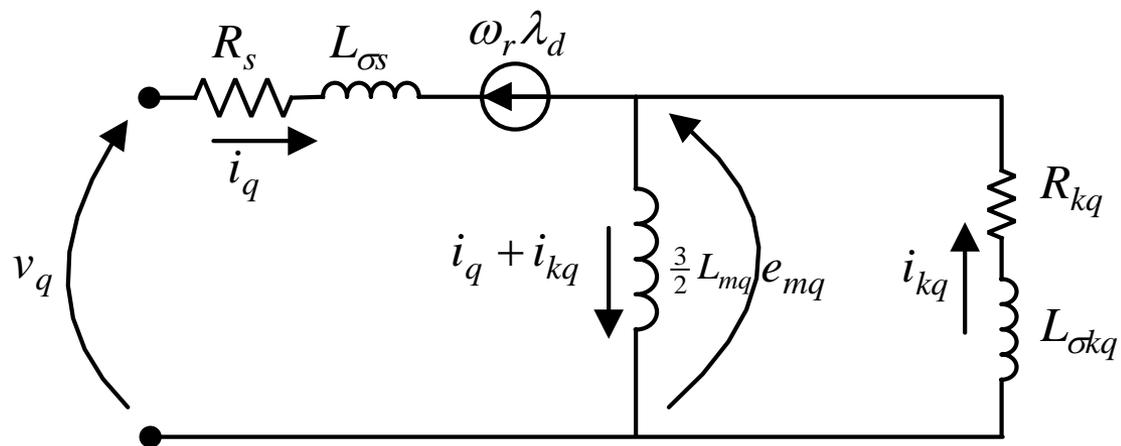
$$e_{md} = \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} (i_d + i_{kd} + i_f) \quad (101)$$

$$e_{mq} = \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) \frac{d}{dt} (i_q + i_{kq})$$

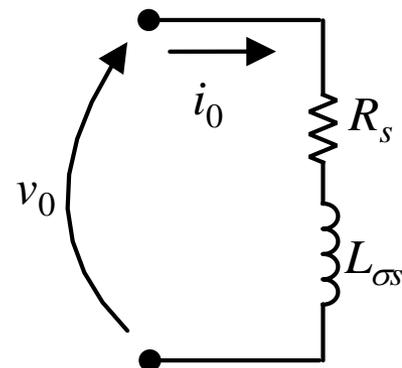
E' immediato dimostrare che le (100) corrispondono al seguente circuito equivalente:



Circuito
equivalente di
asse d



Circuito
equivalente di
asse q



Circuito
equivalente
omopolare

Fig. 7

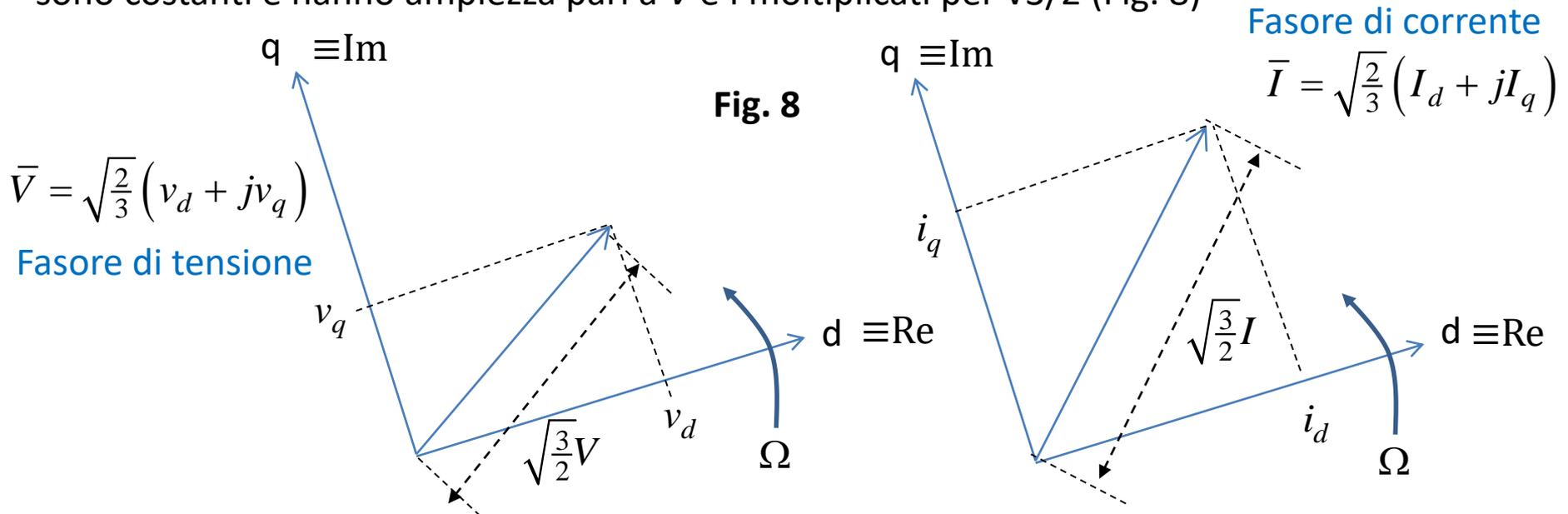
Modello di macchina sincrona in regime stazionario

Come visto parlando di principio di funzionamento della macchina sincrona, nel funzionamento in regime stazionario con pulsazione di statore frequency Ω_s , il rotore ruota in perfetto sincronismo con il campo rotante di statore, ossia con velocità elettrica Ω_r uguale a Ω_s , cioè

$$\omega_r = \Omega_r = \Omega_s = \Omega \quad (102)$$

Indichiamo con V l'ampiezza della tensione di fase (sinusoidale) e con I l'ampiezza della corrente di fase di statore in condizioni stazionarie.

Sappiamo dallo studio del campo rotante che, nel sistema di riferimento rotante dq rotante alla velocità di sincronismo, le componenti d e q dei vettori trasformati di tensione e corrente sono costanti e hanno ampiezza pari a V e I moltiplicati per $\sqrt{3}/2$ (Fig. 8)



Per comodità di notazione, definiamo le componenti (costanti) di tensione e corrente lungo gli assi d e q come segue:

$$v_d = \sqrt{\frac{3}{2}}V_d \quad v_q = \sqrt{\frac{3}{2}}V_q \quad i_d = \sqrt{\frac{3}{2}}I_d \quad i_q = \sqrt{\frac{3}{2}}I_q \quad (103)$$

Sappiamo (vedi parte su campo rotante) che facendo coincidere l'asse d con l'asse reale e l'asse q con quello immaginario, il vettore costante di corrente e tensione nel piano dq si identifica col corrispondente fasore (a meno della costante $\sqrt{3}/2$, Fig. 8), per cui:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_d + jv_q) = V_d + jV_q \quad \bar{I} = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_d + ji_q) = I_d + jI_q \quad (103')$$

Con tale scelta si ha (Fig. 8):

$$\begin{aligned} \sqrt{v_d^2 + v_q^2} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{V_d^2 + V_q^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}V \quad \longrightarrow \quad \sqrt{V_d^2 + V_q^2} = V = |\bar{V}| \\ \sqrt{i_d^2 + i_q^2} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{I_d^2 + I_q^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}I \quad \longrightarrow \quad \sqrt{I_d^2 + I_q^2} = I = |\bar{I}| \end{aligned} \quad (104)$$

Inoltre per il circuito di eccitazione definiamo le tensioni e correnti costanti a regime:

$$v_f = V_f \quad i_f = I_f \quad (105)$$

NB: ricordare che sono valori riportati a statore in base alle (54)

In condizioni stazionarie, in virtù del sincronismo non vi sono correnti negli smorzatori:

$$i_{kd} = 0 \quad i_{kq} = 0 \quad (106)$$

e tutte le grandezze sono costanti nel tempo (nel sistema dq)

$$\frac{d}{dt} i_d = 0 \quad \frac{d}{dt} i_q = 0 \quad \frac{d}{dt} i_f = 0 \quad \frac{d}{dt} i_{kd} = 0 \quad \frac{d}{dt} i_{kq} = 0 \quad (107)$$

Usando le (104)-(107), le equazioni dinamiche di macchina (98) si particolarizzano al caso stazionario e – annullandosi le derivate – danno le seguenti relazioni algebriche:

$$V_d = R_s I_d - \Omega \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) I_q \quad V_q = R_s I_q + \Omega \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) I_d + \Omega \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) I_f$$

$$V_f = R_f I_f \quad (108)$$

Per l'equazione di coppia (93) si ha:

$$T_m = p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) i_d i_q + \frac{3}{2} L_{md} (i_f + i_{kd}) i_q - \frac{3}{2} L_{md} i_{kq} i_d \right] =$$

$$= \frac{3}{2} p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) I_d I_q + \frac{3}{2} L_{md} I_f I_q \right] \quad (108')$$

Per comodità si introducono le «induttanze sincrone» di asse d e di asse q e le corrispondenti «reattanze sincrone» definite come:

$L_d = \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}$	$X_d = \Omega L_d$	(109)
$L_q = \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}$	$X_q = \Omega L_q$	

Inoltre si osserva che il termine $\Omega \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) I_f$ rappresenta la f.e.m. che si induce in una fase di statore in condizioni stazionarie per effetto della sola corrente di eccitazione. Infatti, imponendo nelle (108) che la corrente di statore sia nulla, si ha che la tensione coincide con la f.e.m. prodotta dalla sola corrente di eccitazione I_f :

$$\begin{array}{l|l}
 I_d = 0 & V_d = 0 \\
 I_q = 0 & V_q = V = \Omega \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) I_f
 \end{array}$$

Definiamo per comodità E tale f.e.m. dovuta alla sola corrente di eccitazione:

$$\boxed{E \triangleq \Omega \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) I_f} \quad (110)$$

Si nota inoltre che E è rappresentata, nel piano dq, dalla sola componente q. Pertanto, la direzione del vettore che rappresenta la f.e.m. determina in modo univoco la posizione dell'asse q (v. circuito equivalente dopo).

Con le precedenti definizioni, le equazioni a regime della macchina sincrona diventano:

$$\begin{array}{l}
 V_d = R_s I_d - X_q I_q \\
 V_q = R_s I_q + X_d I_d + E \\
 V_f = R_f I_f \\
 T_m = \frac{3}{2} \frac{P}{\Omega} \left[(X_d - X_q) I_d I_q + E I_q \right]
 \end{array}
 \quad \Omega_m = \frac{\Omega}{p} \quad (111)$$

Equivalentemente, moltiplicando la seconda delle (111) per j e sommando alla prima:

$$V_d + jV_q = R_s (I_d + jI_q) + jX_d I_d + jX_q (jI_q) + jE \quad (112) \quad \text{e usando i fasori definiti in (103'):$$

Equazione a regime per motore sincrono

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{V} &= R_s \bar{I} + jX_d \cdot \bar{I}_d + jX_q \cdot \bar{I}_q + \bar{E} & V_f &= R_f I_f \\ T_m &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[(X_d - X_q) I_d I_q + E I_q \right] \end{aligned}} \quad (113)$$

con

$$\bar{E} = 0 + jE \quad (114)$$

fasore corrispondente alla f.e.m. di fase prodotta dal circuito di eccitazione e avendo definito il fasore della corrente come

$$\bar{I} = I_d + jI_q = \bar{I}_d + \bar{I}_q \quad (115) \quad \left(\bar{I}_d = I_d, \bar{I}_q = jI_q \right)$$

Come specificato sopra, la posizione degli assi d e q si cui viene protiettato il fasore di corrente non è arbitrario, ma è tale che il fasore della forza elettromotrice E abbia solo componente lungo l'asse q (cioè solo componente immaginaria)

DIAGRAMMA DI BLONDEL

L'equazione fasoriale (113), scritta per un motore sincrono, corrisponde al diagramma fasoriale di Fig. 9, noto come «diagramma di Blondel».

Si nota che, nel diagramma di Blondel, il fasore di corrente non può essere direttamente usato per il calcolo della caduta di tensione sulle reattanze sincrone. Per calcolare tale c.d.t., infatti, il fasore di corrente deve intendersi come somma di due fasori orientati rispettivamente lungo l'asse d e l'asse q in base a (115):

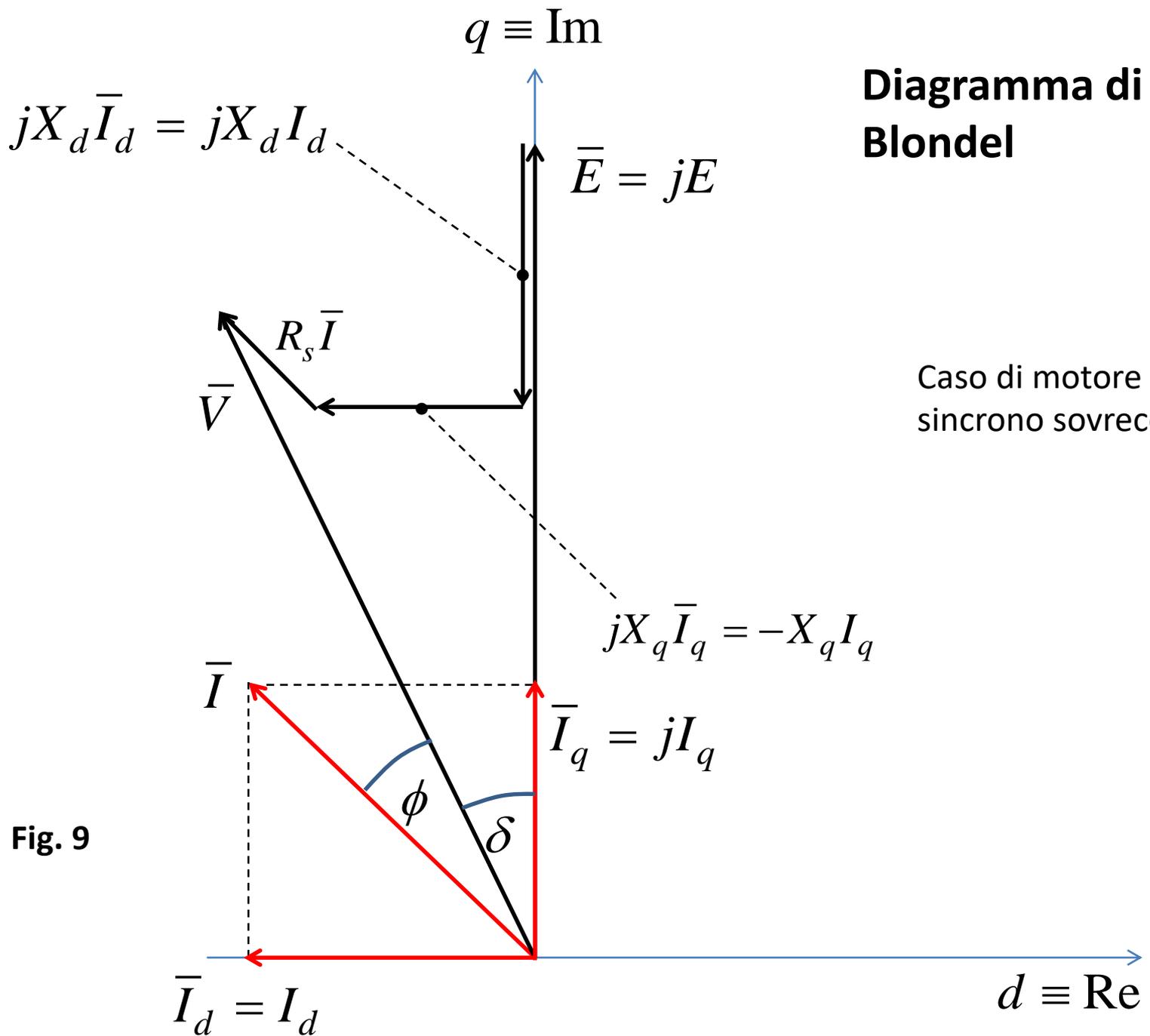


Fig. 9

Il fasore \bar{I}_d produce la c.d.t. $jX_d\bar{I}_d$ attraverso la reattanza sincrona di asse d.

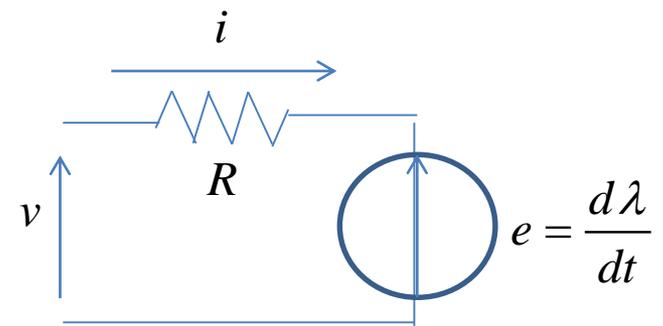
Il fasore \bar{I}_q produce la c.d.t. $jX_q\bar{I}_q$ attraverso la reattanza sincrona di asse q.

Con riferimento al diagramma di Blondel, l'angolo δ compreso tra i fasori di tensione e di f.e.m. dovuta alla corrente di eccitazione si definisce angolo di carico.

Il diagramma mostrato in Fig. 8 è proprio di un motore sincrono «sovreccitato» in quanto la relazione di fase tra tensione e corrente è tale che la f.e.m. dovuta alla corrente di eccitazione è maggiore della tensione ai morsetti.

Il diagramma mostrato in Fig. 9 mostra il diagramma di Blondel per un motore sincrono sottoeccitato, cioè con una relazione di fase tra tensione e corrente tale che la f.e.m. dovuta alla corrente di eccitazione è minore della tensione ai morsetti.

Si nota che l'equazione a regime (113) è relativa alla «convenzione del motore», che si è sempre assunta per la modellizzazione della macchina e, quindi, nella derivazione delle equazioni dinamiche e stazionarie. Infatti si è sempre assunta la convenzione mostrata nello schema a sinistra, in particolare per la scrittura della (64), da cui tutte le eqq. successive derivano.



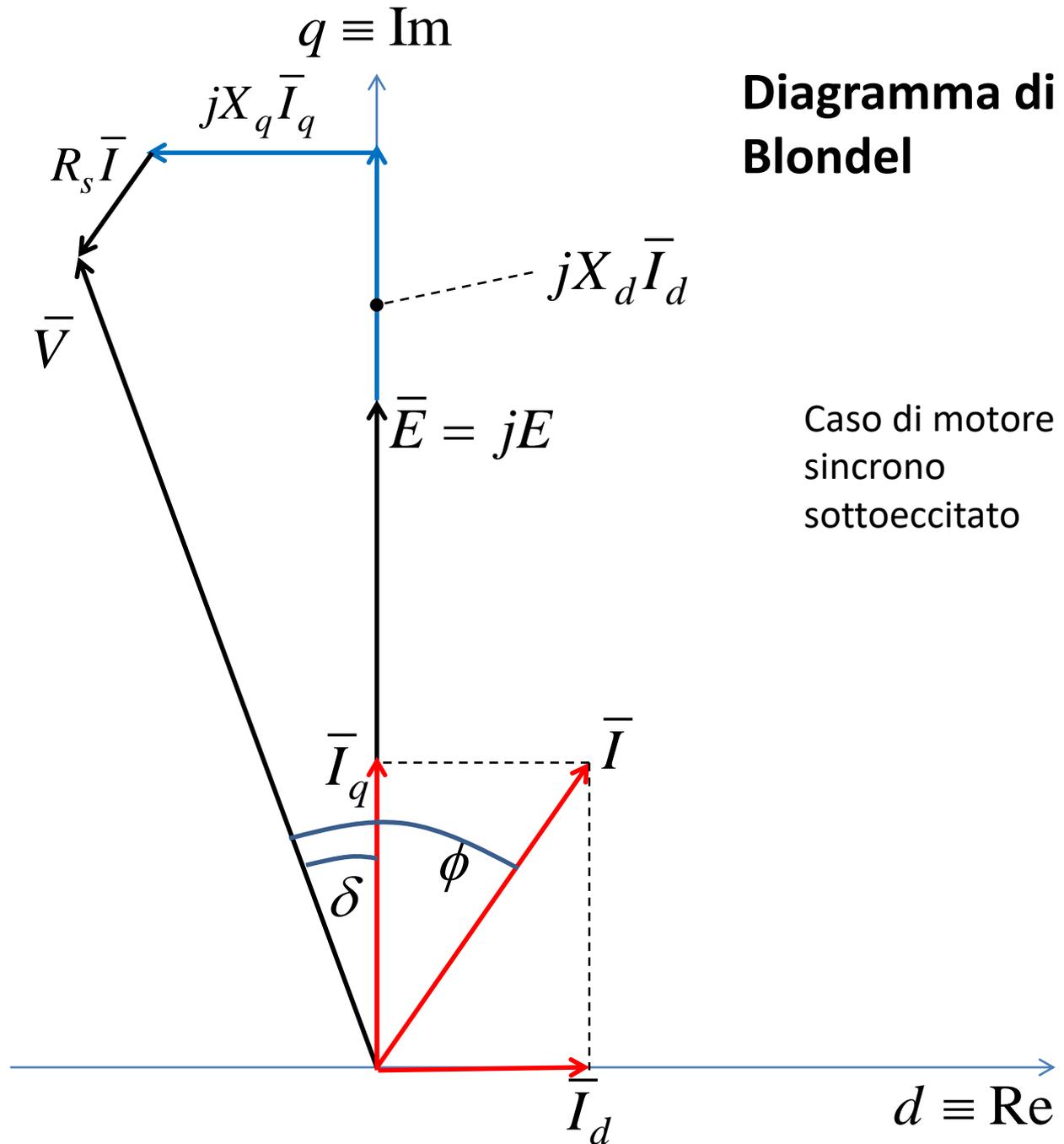
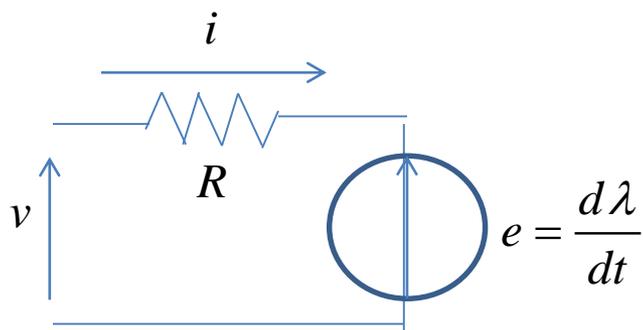
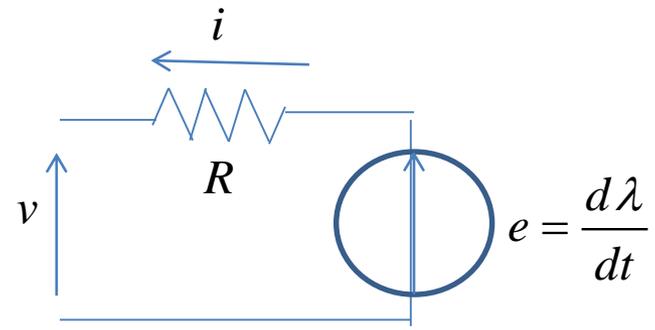


Fig. 10



Convenzione del motore



Convenzione del generatore

Per studiare un generatore sincrono, è ovviamente naturale assumere la convenzione del generatore (v. sopra). Secondo tale convenzione, il modello della macchina è identico salvo cambiare il segno della corrente (che è positiva se uscente) e cambiare segno alla coppia. Quindi le equazioni a regime per un generatore sincrono sono le (113) con il fasore di corrente statorica cambiato di segno.

$$\begin{aligned} \bar{V} &= -R_s \bar{I} - jX_d \cdot \bar{I}_d - jX_q \cdot \bar{I}_q + \bar{E} & V_f &= R_f I_f \\ T_m &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[(X_{md} - X_{mq}) (-I_d) (-I_q) + E (-I_q) \right] & &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[EI_q - (X_{md} - X_{mq}) I_d I_q \right] \end{aligned} \quad (116)$$

Equazione a regime
per generatore
sincrono

$$\begin{aligned} \bar{E} &= R_s \bar{I} + jX_d \cdot \bar{I}_d + jX_q \cdot \bar{I}_q + \bar{V} \\ V_f &= R_f I_f \\ T_m &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[EI_q - (X_d - X_q) I_d I_q \right] \end{aligned} \quad (117)$$

con fasore di corrente sempre dato dalla (115).

Anche la (117) può essere rappresentata nella forma di un diagramma fasoriale (diagramma di Blondel per generatore sincrono).

Le Figg. 10 e 11 mostrano i diagrammi fasoriali per un generatore sincrono, rispettivamente sovr eccitato e sottoeccitato.

Il generatore si definisce sovr eccitato o sottoeccitato a seconda che l'ampiezza E della f.e.m. di fase prodotta dalla sola corrente di eccitazione sia maggiore o minore della tensione ai morsetti.

La condizione di funzionamento tipica del generatore sovr eccitato (Fig. 10) è quella di un generatore che alimenta un carico ohmico-induttivo (quindi con tensione in anticipo sulla corrente).

La condizione di funzionamento tipica del generatore sottoeccitato (Fig. 11) è quella di un generatore che alimenta un carico ohmico-capacitivo (quindi con tensione in ritardo sulla corrente).

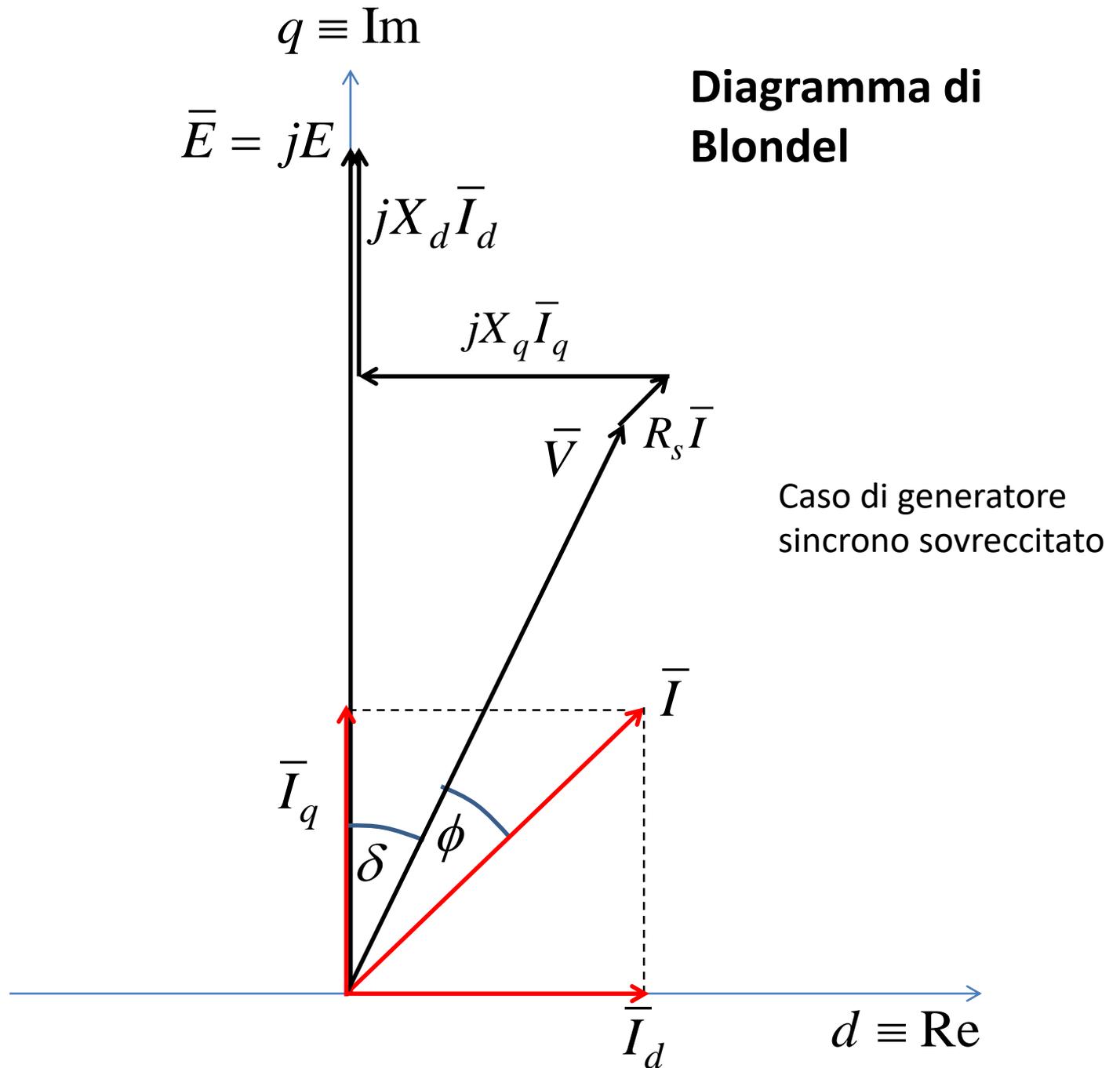


Fig. 10

Diagramma di Blondel

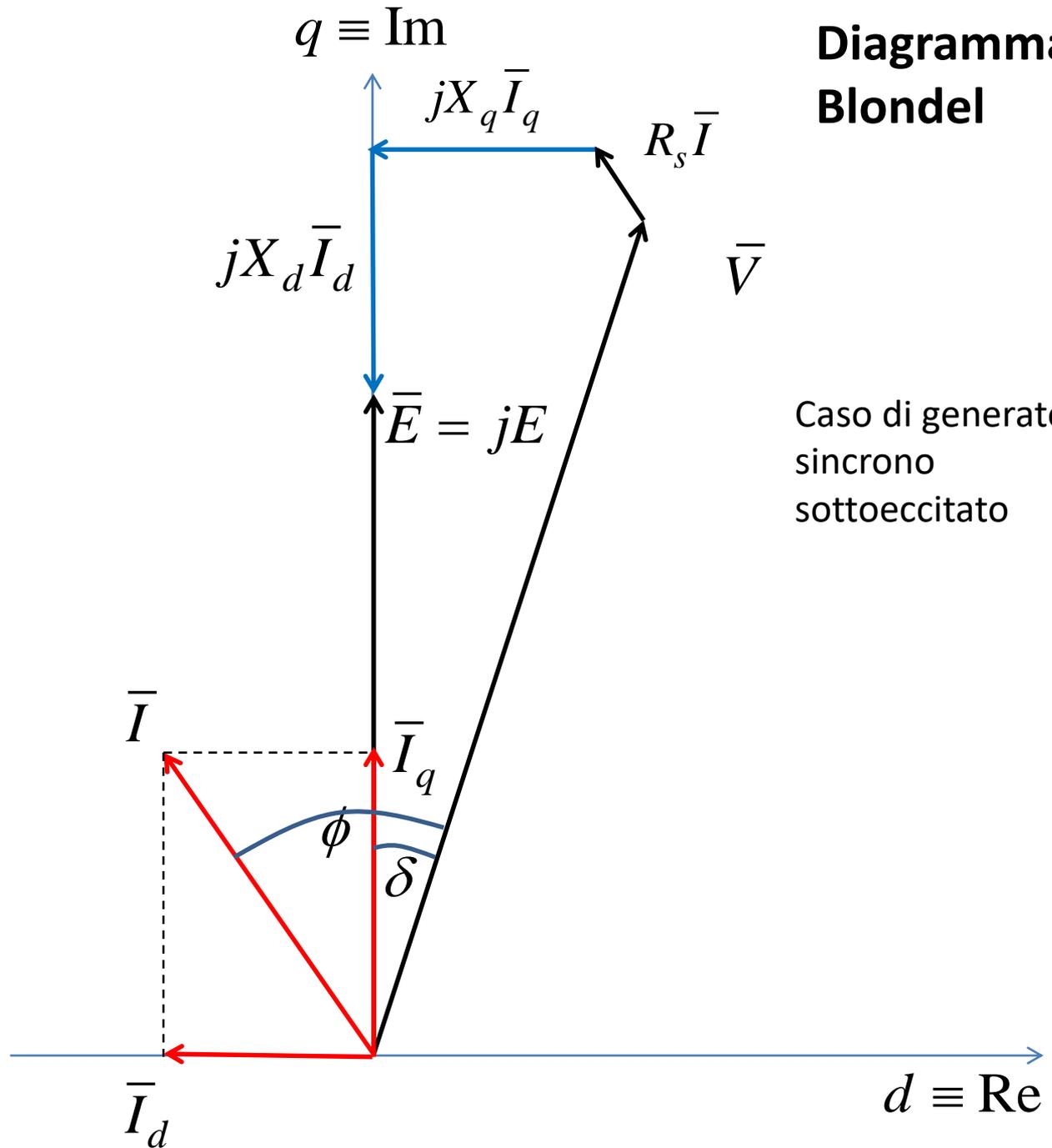


Fig. 11

A cosa serve il diagramma di Blondel

Nella pratica, le equazioni in regime stazionario e i relativi diagrammi di Blondel sono necessari per determinare la corrente di eccitazione a carico richiesta dalla macchina in un certo punto di lavoro, caratterizzato da:

- tensione di fase V ,
- corrente di fase I
- fattore di potenza $\cos\phi$ (in anticipo o in ritardo)
- velocità (ovvero frequenza)

Per il calcolo devono essere note ovviamente, la resistenza di statore e le reattanze sincrone X_d e X_q .

Infatti, una volta note le grandezze sopra, tramite il diagramma di Blondel è possibile determinare l'ampiezza E della f.e.m. di fase dovuta alla corrente di eccitazione. D'altra parte, tale ampiezza E si è visto [eq. (15)] essere data da

$$E = 2\pi f \Phi N'_s$$

con Φ flusso per polo che si è visto [eq. (3)] essere dato da:

$$\Phi = \left(\frac{2}{\pi} \mu_0 N_F \frac{\tau_p L}{\delta} \right) I_F$$

Combinando le due sopra:

$$E = \left(4\mu_0 N_F \frac{\tau_p L}{\delta} f N'_s \right) I_F \quad (118)$$

Passo polare (pointing to τ_p)
 Numero di spire efficaci in serie per fase di statore (pointing to N'_s)
 Numero di spire di eccitazione per polo (pointing to N_F)
 Traferro minimo (pointing to δ)

Dalla (118) risulta evidente che (in regime di linearità) la f.e.m. E è direttamente proporzionale alla corrente di eccitazione I_F .

Pertanto è confermato che, risolto il diagramma di Blondel, è possibile determinare la f.e.m. E e, dalla (118), la corrente di eccitazione richiesta a carico.

Come si risolve analiticamente il diagramma di Blondel

Come visto per le macchine asincrone, la soluzione dei diagrammi fasoriali per via grafica è una pratica oggi non utilizzata.

La soluzione del diagramma di Blondel può essere effettuata analiticamente determinando, innanzitutto, l'angolo di carico δ attraverso la procedura descritta sotto.

Si prenda ad esempio il diagramma di Fig. 10, di cui si riporta la porzione di interesse in Fig. 12.

Individuato il fasore OA come in Fig. 12, esso si può scrivere come:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= V e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta)} + R I e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta-\phi)} + j X_q j I_q = \\ &= V e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta)} + R I e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta-\phi)} - X_q I \cos(\delta + \phi)\end{aligned}$$

Si vede che la parte reale del fasore OA deve essere 0 e quindi si impone tale condizione

$$\operatorname{Re}(\overrightarrow{OA}) = \operatorname{Re}\left\{V e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta)} + R I e^{j(\frac{\pi}{2}-\delta-\phi)} - X_q I \cos(\delta + \phi)\right\} = 0$$

ossia:

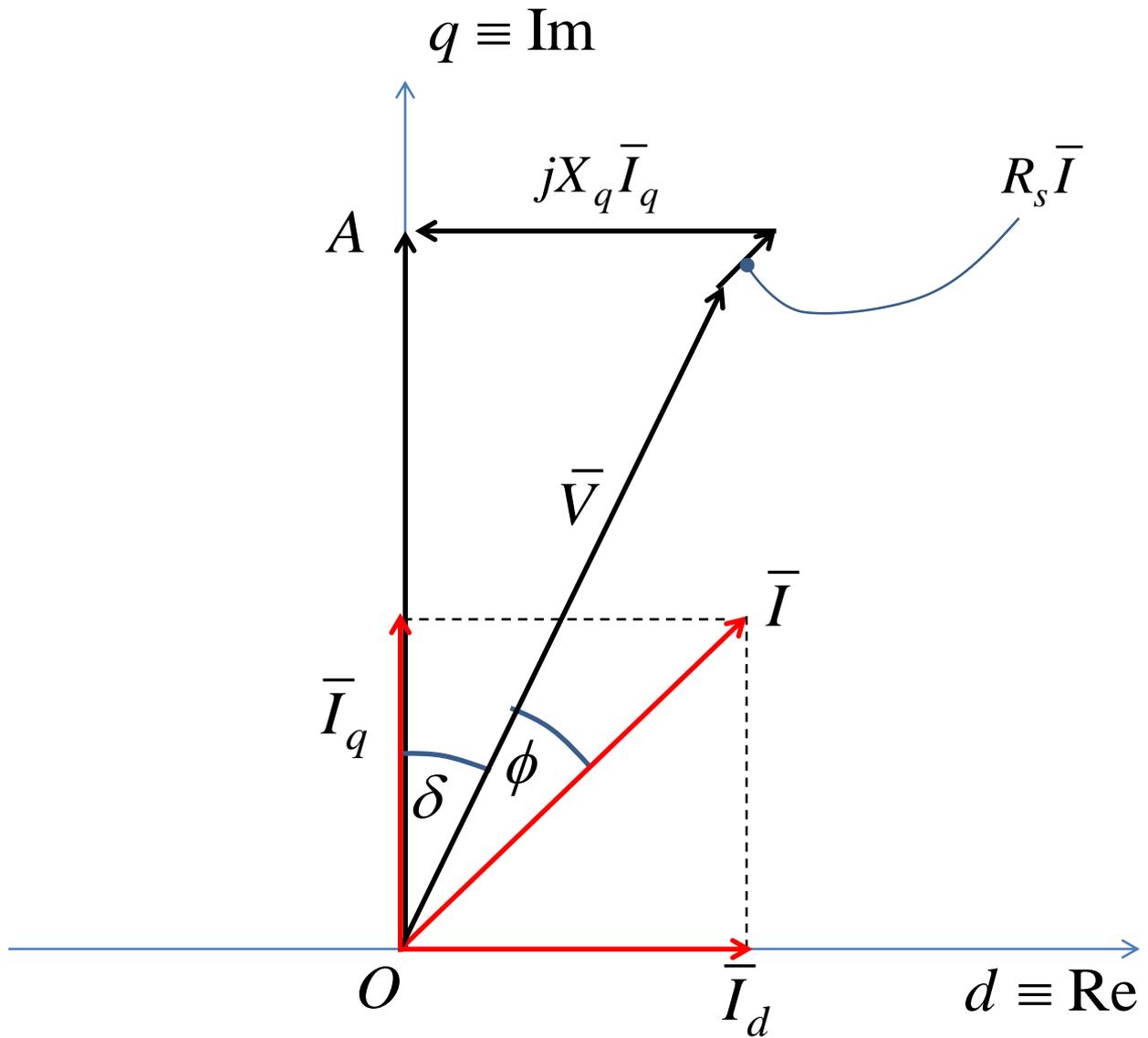


Fig. 12

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ V e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} + R I e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\delta-\phi\right)} - X_q I \cos(\delta + \phi) \right\} = \\
& = V \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + R I \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta-\phi\right) - X_q I \cos(\delta + \phi) = \\
& = V \sin(\delta) + R I \sin(\delta + \phi) - X_q I \cos(\delta + \phi) = \\
& = V \sin(\delta) + R I \sin(\delta) \cos(\phi) + R I \cos(\delta) \sin(\phi) - X_q I \cos(\delta) \cos(\phi) + X_q I \sin(\delta) \sin(\phi) = \\
& = \sin(\delta) \left[V + R I \cos(\phi) + X_q I \sin(\phi) \right] + \cos(\delta) \left[R I \sin(\phi) - X_q I \cos(\phi) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\sin(\delta) \left[V + R I \cos(\phi) - X_q I \sin(\phi) \right] = \cos(\delta) \left[X_q I \cos(\phi) - R I \sin(\phi) \right]$$

$$\tan(\delta) = \frac{X_q I \cos(\phi) - R I \sin(\phi)}{V + R I \cos(\phi) + X_q I \sin(\phi)}$$

$$\delta = \arctan \left(\frac{X_q I \cos(\phi) - R I \sin(\phi)}{V + R I \cos(\phi) + X_q I \sin(\phi)} \right) \quad (119)$$

(con ϕ angolo positivo se la tensione è in anticipo sulla corrente, come in Fig. 10), negativo altrimenti.

Una volta determinato l'angolo di carico, la determinazione della f.e.m. dovuta all'eccitazione è semplice attraverso (117) e Fig. 10:

$$\bar{I}_d = I \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta - \phi\right) = I \sin(\delta + \phi)$$

$$\bar{I}_q = jI \cos(\delta + \phi)$$

$$\bar{V} = V e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

$$\bar{E} = R_s \bar{I} + jX_d \cdot \bar{I}_d + jX_q \cdot \bar{I}_q + \bar{V}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_d + \bar{I}_q$$

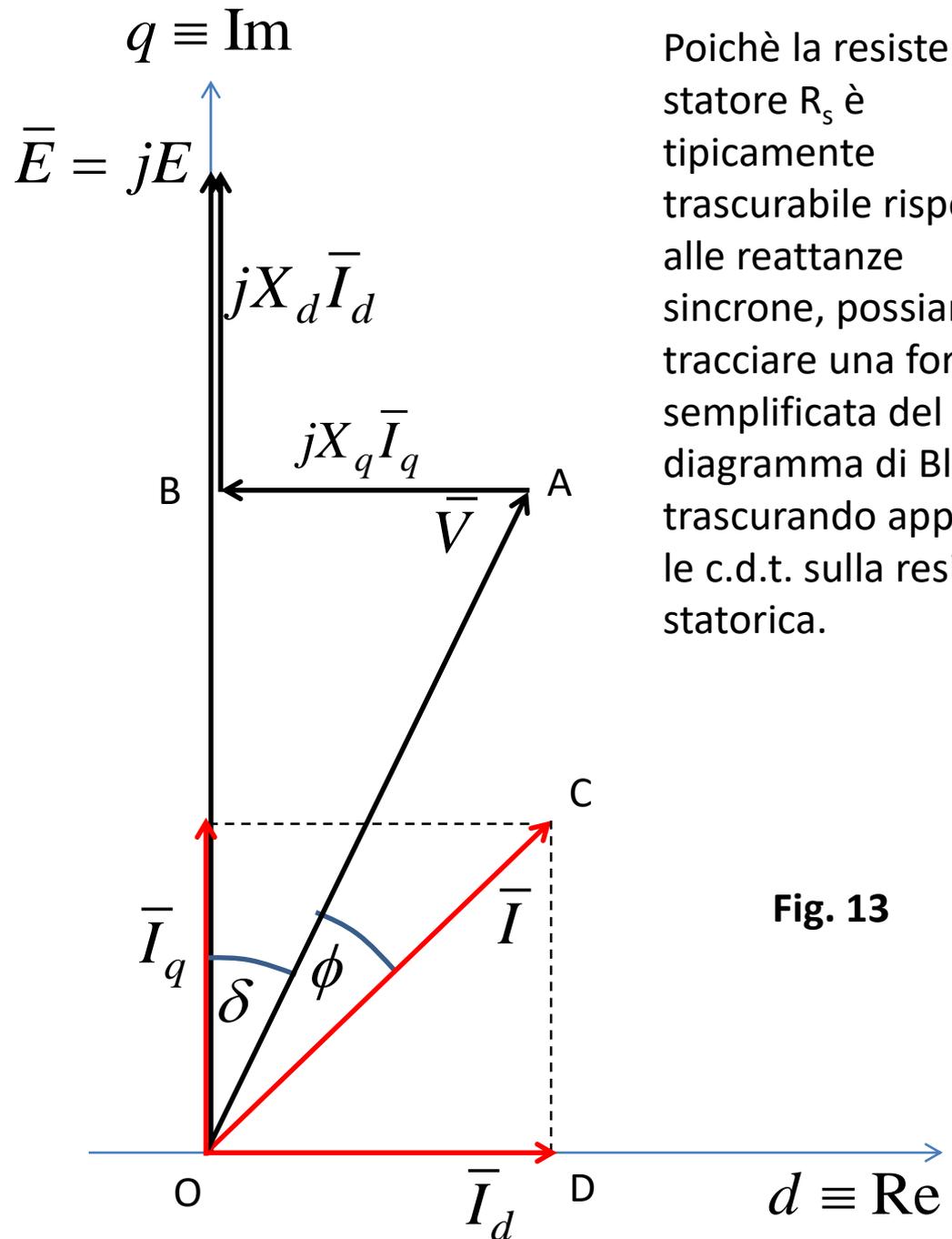
ESPRESSIONE DELLA COPPIA IN FUNZIONE DELL'ANGOLO DI CARICO

Nella rappresentazione del comportamento stazionario della macchina mediante il diagramma di Blondel, si è visto il significato dell'angolo di carico δ , cioè l'angolo di sfasamento tra il fasore della tensione di fase (V) e quello della f.e.m. Indotta dal circuito di eccitazione E .

E' utile (ad esempio per considerazioni sulla stabilità) trovare una espressione della coppia per la macchina sincrona che sia alternativa a quelle in (111) e (117), espressione che non contenga le correnti ma V , E e δ .

Allo scopo consideriamo, ad esempio, il caso del generatore sincrono [equazioni (117), Figg. 10, 11).

Per derivare l'espressione della coppia, consideriamo in particolare il caso di generatore sovr eccitato (Fig. 10), ma la formula ottenuta ha validità generale (infatti si dimostra facilmente che si arriva alla stessa espressione in tutti i casi).



Poichè la resistenza di statore R_s è tipicamente trascurabile rispetto alle reattanze sincrone, possiamo tracciare una forma semplificata del diagramma di Blondel trascurando appunto le c.d.t. sulla resistenza statorica.

Fig. 13

Da banali considerazioni trigonometriche sui triangoli rettangoli OAB e OCD si può scrivere:

$$X_q I_q = V \sin \delta \quad X_d I_d = E - V \cos \delta \quad (120)$$

$$I_q = \frac{V \sin \delta}{X_q} \quad I_d = \frac{E - V \cos \delta}{X_d} \quad (121)$$

Sostituiamo le (121) nell'equazione di coppia (117):

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[E I_q - (X_d - X_q) I_d I_q \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[E \frac{V \sin \delta}{X_q} - (X_d - X_q) \frac{V \sin \delta}{X_q} \frac{E - V \cos \delta}{X_d} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[E \frac{V \sin \delta}{X_q} + (X_d - X_q) \frac{V^2 \sin \delta \cos \delta}{X_d X_q} - (X_d - X_q) \frac{E V \sin \delta}{X_q X_d} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[E \frac{V \sin \delta}{X_q} + (X_d - X_q) \frac{V^2 \sin \delta \cos \delta}{X_d X_q} - E \frac{V \sin \delta}{X_q} + \frac{E V \sin \delta}{X_d} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[(X_d - X_q) \frac{V^2 \sin 2\delta}{2 X_d X_q} + \frac{E V \sin \delta}{X_d} \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[\frac{E V}{X_d} \sin \delta + \frac{X_d - X_q}{2 X_d X_q} V^2 \sin 2\delta \right] \end{aligned} \quad (122)$$

$$T_m = \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \left[\frac{EV}{X_d} \sin \delta + \frac{X_d - X_q}{2X_d X_q} V^2 \sin 2\delta \right] \quad (122)$$

Termine dovuto all'interazione tra campo di statore e campo di rotore

Termine di riluttanza, cioè contributo di coppia dovuto all'anisotropia ($X_d \neq X_q$)

Tracciamo la coppia in funzione dell'angolo di carico tenendo conto che, nelle macchine a rotore avvolto, si ha $X_d > X_q$.

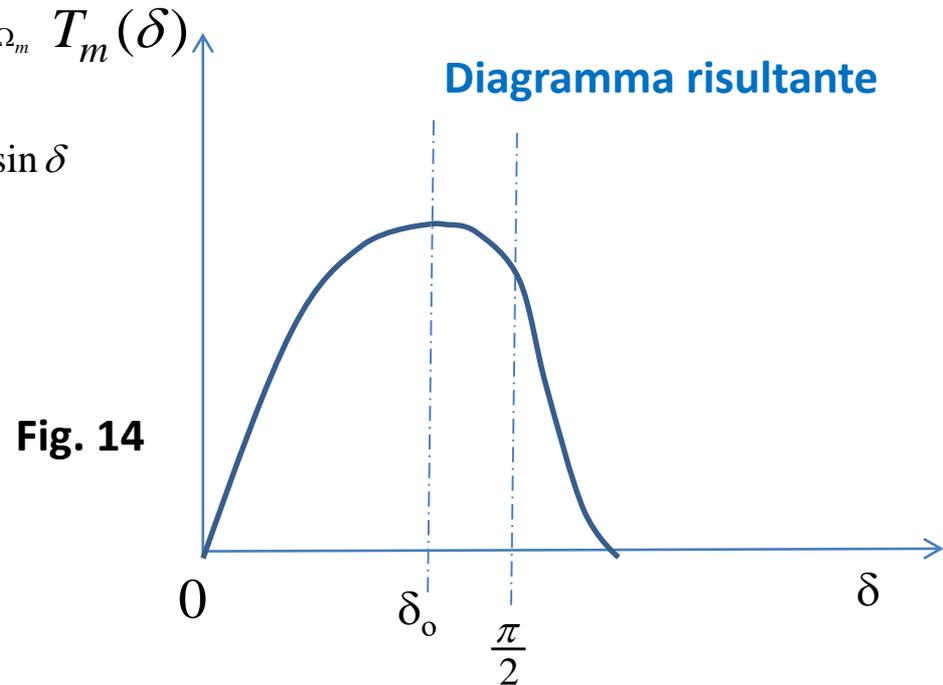
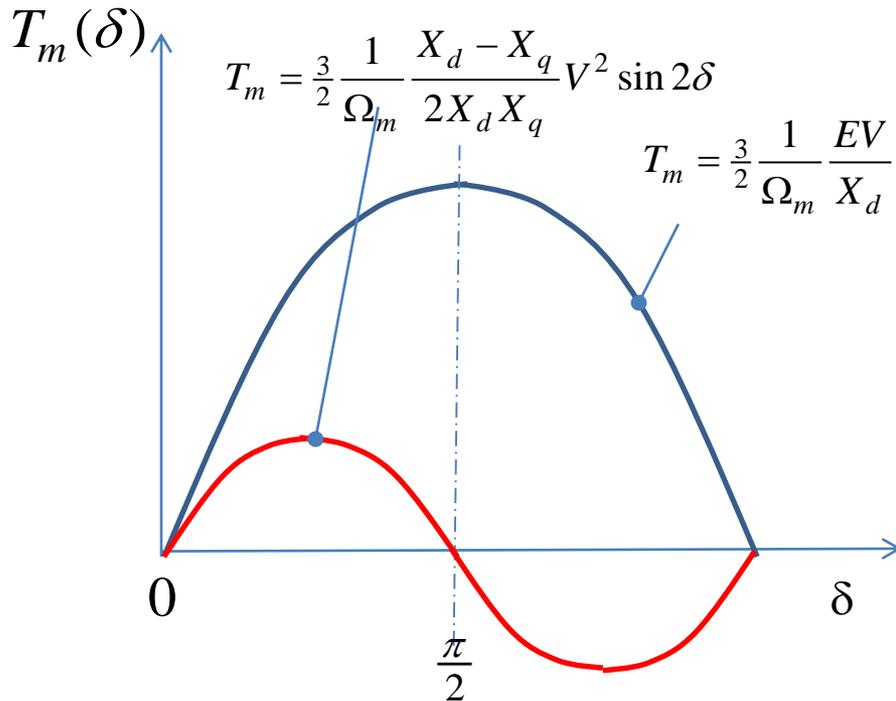


Fig. 14

Il massimo della coppia si ha per un valore δ_0 inferiore a $\pi/2$.

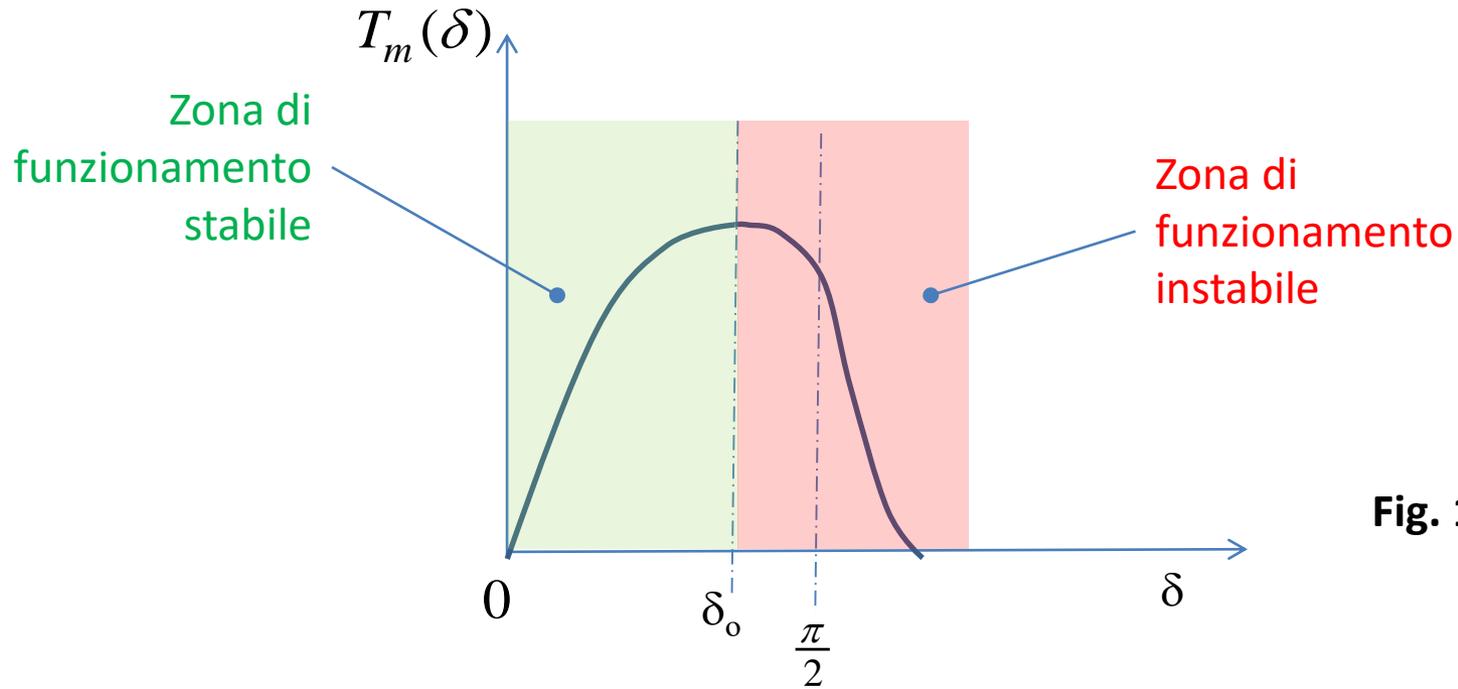


Fig. 15

La macchina funziona può funzionare in modo stabile solo se l'angolo di carico è inferiore a δ_0 .

Si dà nel seguito una giustificazione intuitiva del fatto che la regione in cui la coppia è crescente con l'angolo di carico ($\delta < \delta_0$) è stabile, mentre quella in cui è decrescente è instabile.

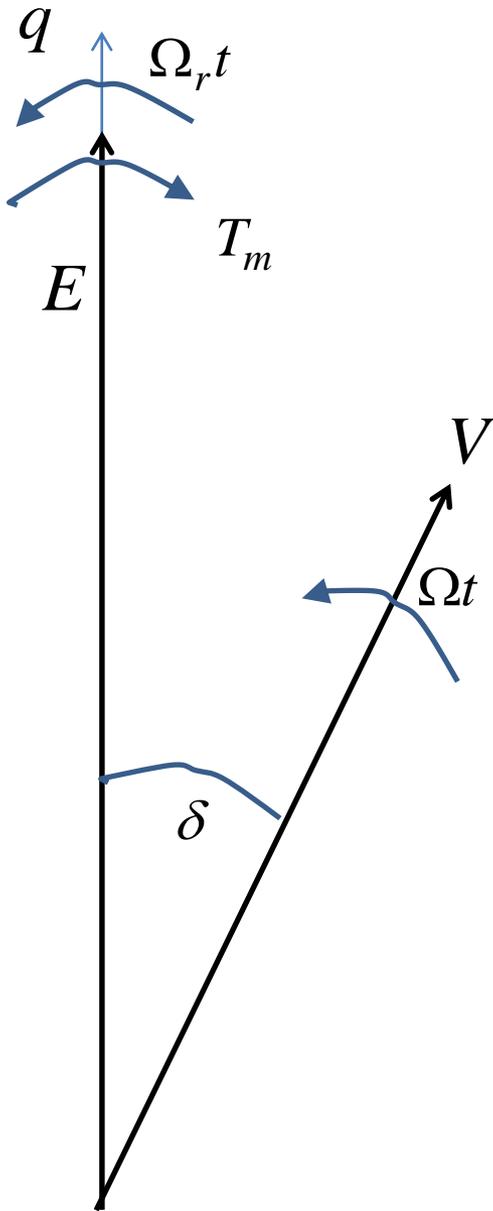
Consideriamo un generatore elettrico che funziona in un certo punto di lavoro stazionario, generatore connesso a una rete ideale a frequenza costante e mosso da un generico motore primo.

L'asse q , solidale con il rotore, ruota alla velocità elettrica del rotore Ω_r mentre il vettore della tensione ruota alla velocità corrispondente alla frequenza di statore Ω .

Supponiamo che, a partire dalla condizione di regime, il motore primo eserciti un aumento di coppia motrice. Questo fa temporaneamente accelerare il rotore, mentre la frequenza di statore (costante se il generatore è connesso alla rete) rimane costante. Quindi l'angolo δ tende ad aumentare.

A questo punto, se il punto di lavoro è nella regione $\delta < \delta_0$, ad un aumento dell'angolo di carico corrisponde un aumento della coppia resistente: la coppia resistente aumenta all'aumentare dell'angolo di carico tendendo a rallentare il rotore e a riportarlo nel punto di equilibrio.

Se invece il punto di lavoro è nella regione $\delta > \delta_0$, ad un aumento dell'angolo di carico corrisponde una riduzione della coppia resistente, cosicchè il rotore continua ad accelerare anzichè tornare nel punto di equilibrio.



PARTICOLARIZZAZIONE AL CASO DI MACCHINA ISOTROPA

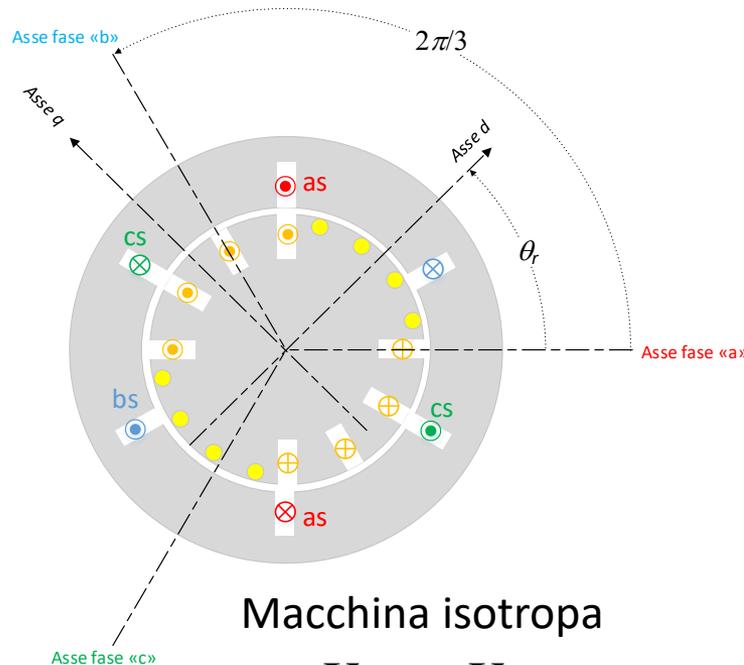
La macchina sincrona si dice isotropa quando ha un traferro approssimativamente uniforme, cioè nelle formule (24) e (25), si ha $\Delta g=0$.

Ciò, approssimativamente, accade per le macchine sincrone a poli lisci.

Dalle (24) e (25), risulta che in una macchina isotropa si ha:

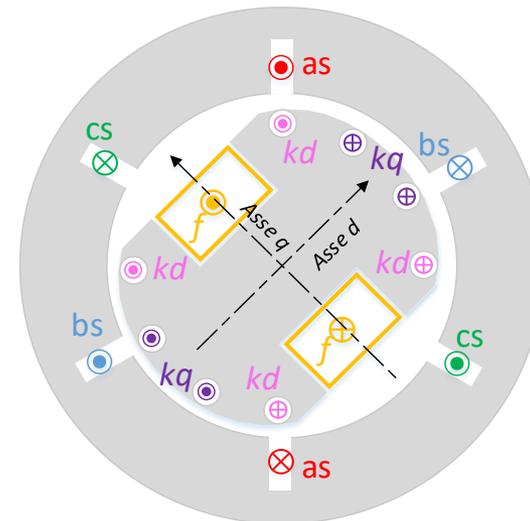
$$L_{md} = L_{mq} = L_m \longrightarrow X_d = X_q = X \quad (123)$$

Reattanza sincrona



Macchina isotropa

$$X_d \cong X_q$$



Macchina anisotropa

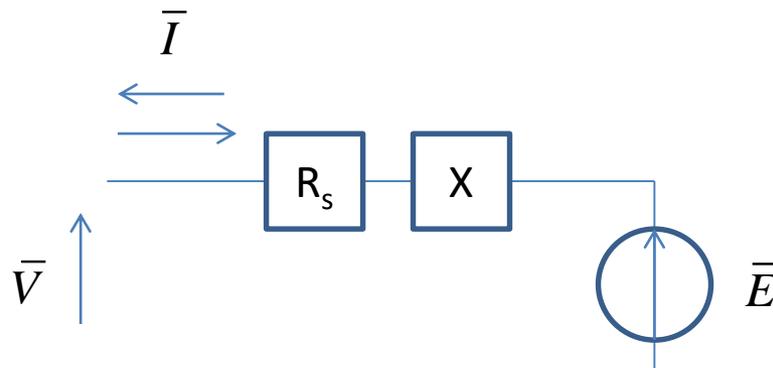
$$X_d > X_q$$

Per la macchina isotropa, le equazioni (113) per il motore sincrono e le (117) per il generatore sincrono si semplificano come segue:

generatore	$\bar{E} = R_s \bar{I} + jX \cdot \bar{I} + \bar{V}$	(124)
motore	$\bar{V} = R_s \bar{I} + jX \cdot \bar{I} + \bar{E}$	(125)
Motore e generatore	$T_m = \frac{3}{2} \frac{1}{\Omega_m} \frac{EV}{X_d} \sin \delta$	(126)
		$V_f = R_f I_f$

← Scompare il termine dovuto alla anisotropia (coppia di riuttanza)

Come si vede le equazioni possono essere scritte senza necessità di evidenziare la scomposizione secondo gli assi d e q. In altri termini, le equazioni elettriche sono quelle proprie di un semplice circuito elettrico:



Di conseguenza il diagramma di Blondel si semplifica nel cosiddetto «diagramma di Behn Eschemburg»:

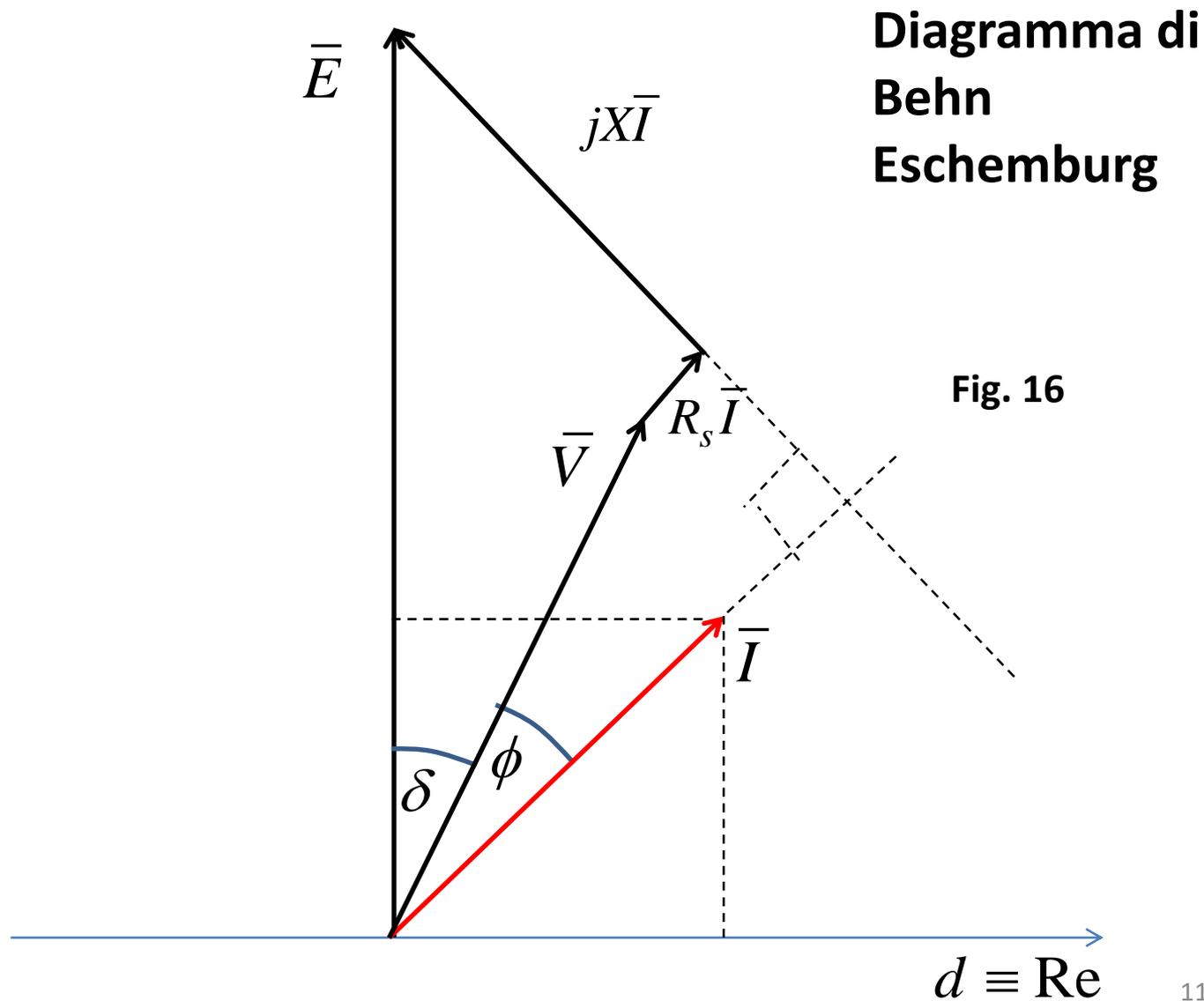


DIAGRAMMA DI «CAPABILITY» DI UN GENERATORE SINCRONO

Il «diagramma di capability» esprime la regione di funzionamento ammissibile per un generatore sincrono collegato alla rete, operante a tensione e frequenza nominali (V_0 e Ω_0). Il punto di lavoro è determinato dalla potenza attiva e reattiva che il generatore è in grado di produrre.

I limiti alla generazione di potenza attiva e reattiva sono per il generatore sono:

- 1) La corrente di statore non può superare il valore nominale I_0 per evitare problemi termici (surriscaldamento) dello statore
- 2) La corrente di eccitazione non può superare un certo valore massimo I_{Fmax} oltre il quale si avrebbero problemi termici (surriscaldamento) del rotore
- 3) L'angolo di carico non può superare il valore δ_0 per il quale la coppia prodotta è massima, con un adeguato margine di sicurezza
- 4) La potenza meccanica erogabile dal motore primo è limitata dalle caratteristiche del motore stesso

Espressioni della potenza attiva e reattiva generata:

$$P = \frac{3}{2} VI \cos \phi \qquad Q = \frac{3}{2} VI \sin \phi \qquad (128)$$

Prendiamo per semplicità il caso di un generatore isotropo e tracciamone il diagramma di Ben Eschemburg ponendo la tensione in direzione orizzontale. Trascuriamo la caduta di tensione sulla resistenza, essendo questa molto piccola rispetto alla reattanza sincrona.

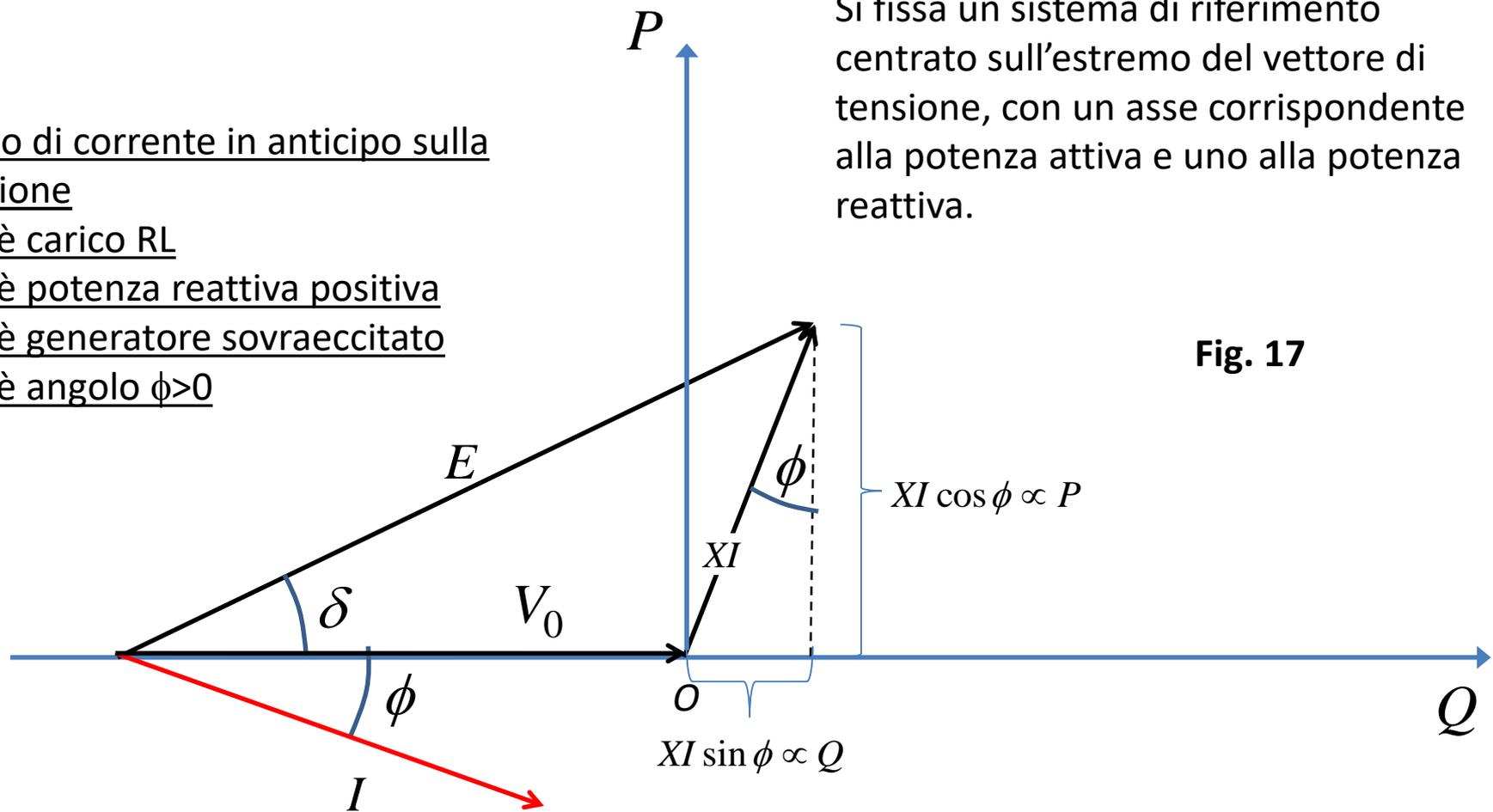
Caso di corrente in anticipo sulla tensione

Cioè carico RL

Cioè potenza reattiva positiva

Cioè generatore sovraeccitato

Cioè angolo $\phi > 0$



Si fissa un sistema di riferimento centrato sull'estremo del vettore di tensione, con un asse corrispondente alla potenza attiva e uno alla potenza reattiva.

Fig. 17

Infatti, si vede che il vettore XI ha componenti rispettivamente proporzionali a P e Q .

Caso di corrente in ritardo sulla
tenione

Cioè carico RC

Cioè potenza reattiva negativa

Cioè generatore sottoeccitato

Cioè angolo $\phi < 0$

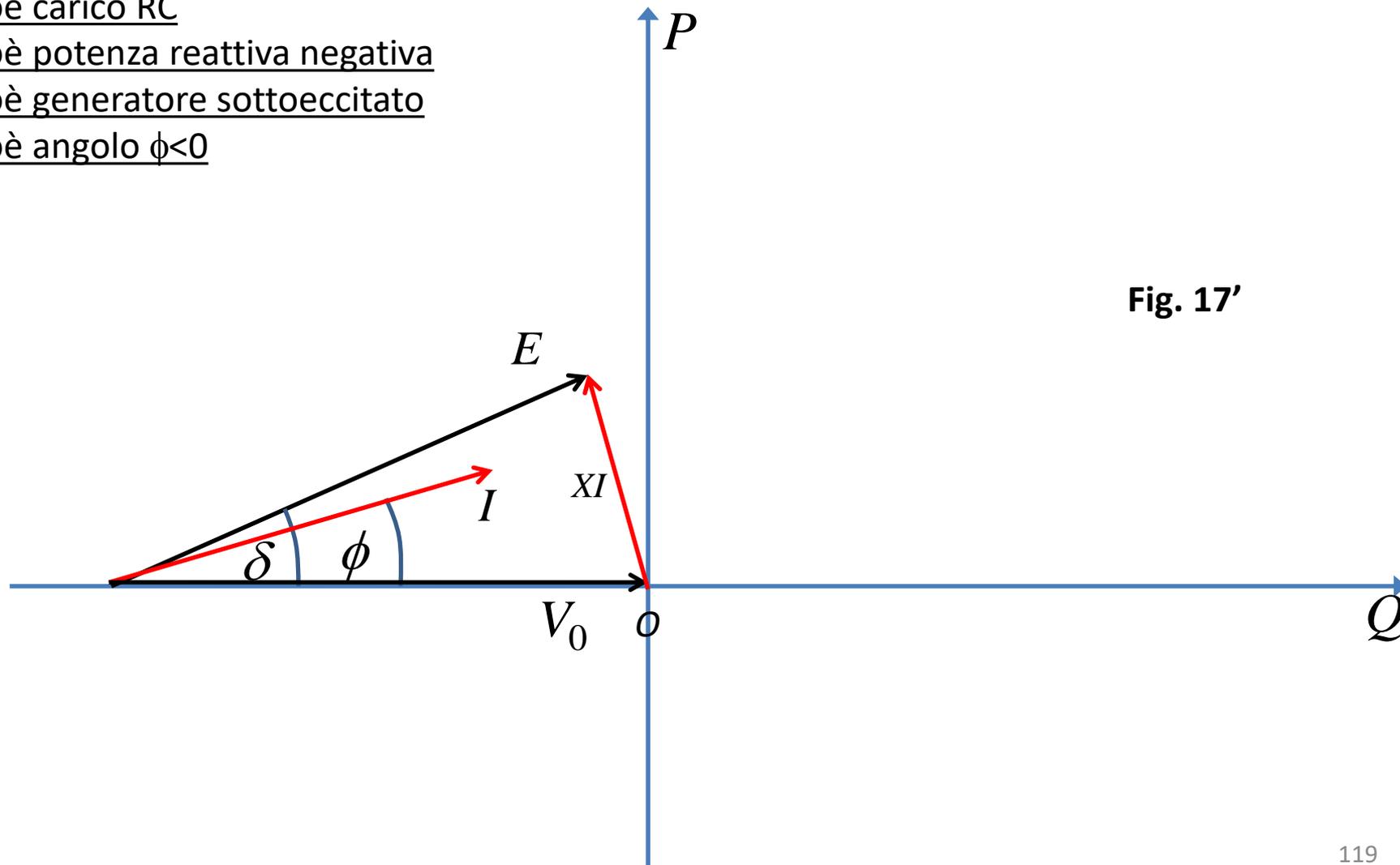


Fig. 17'

Il coefficiente di proporzionalità k è:

$$\begin{aligned} P &= k \cdot XI \cos \phi \\ Q &= k \cdot XI \sin \phi \end{aligned} \longrightarrow k = \frac{3}{2} \frac{V_0}{X}$$

Si vede che il luogo dei punti a corrente nominale è dato dalla circonferenza C_1 :

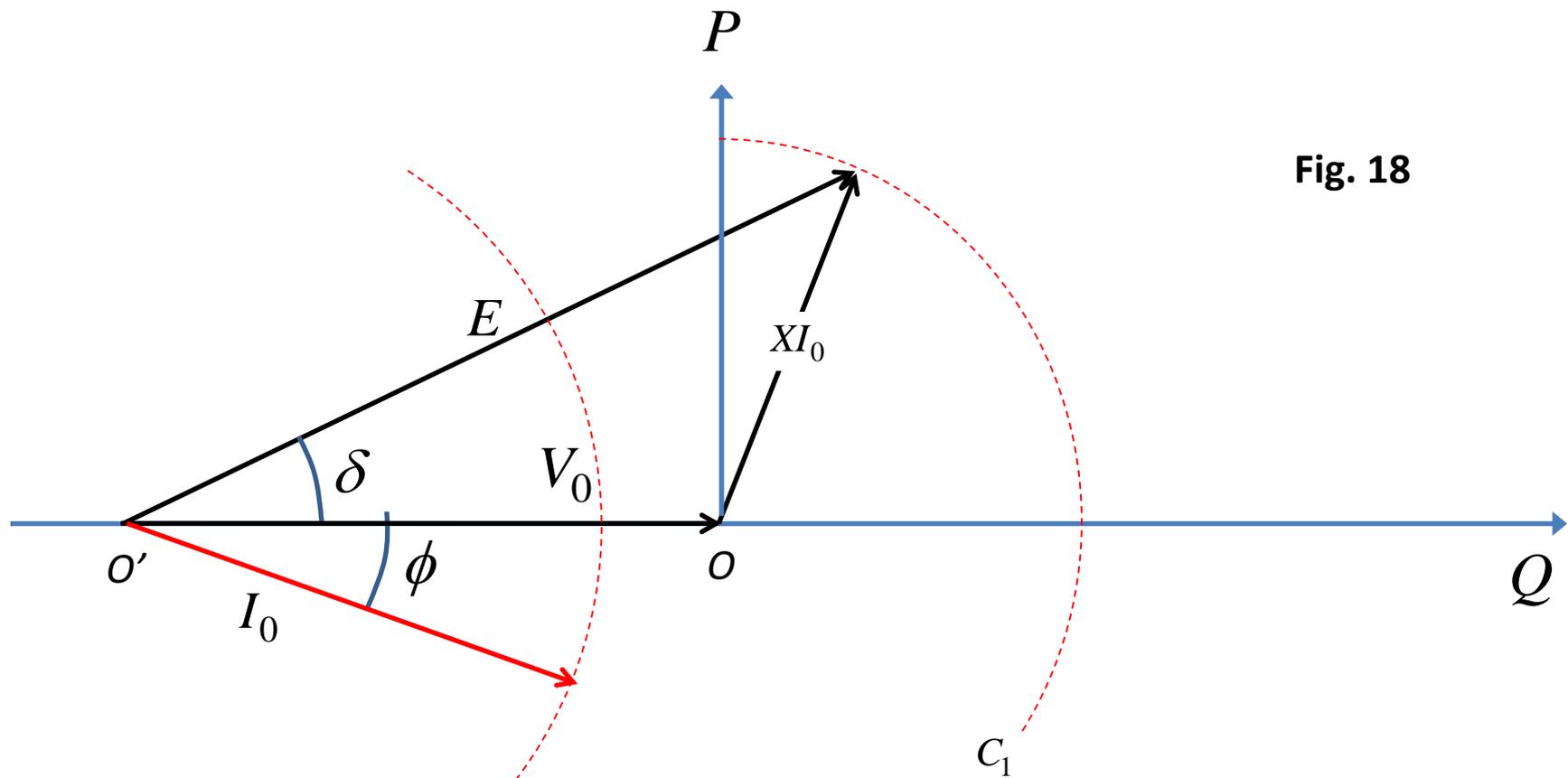


Fig. 18

Il limite sulla corrente di eccitazione si traduce in limite sul E che è proporzionale alla corrente di eccitazione secondo (118). Quindi il luogo dei punti a corrente di eccitazione costante pari al valore massimo è la circonferenza C_2 circonferenza centrata su O' .
 Il limite di stabilità ($\delta=\pi/2$) è ovviamente dato dalla retta r passante per O' (limite teorico in quanto si tiene l'angolo di carico inferiore a $\pi/2$ per il rischio di instabilità).

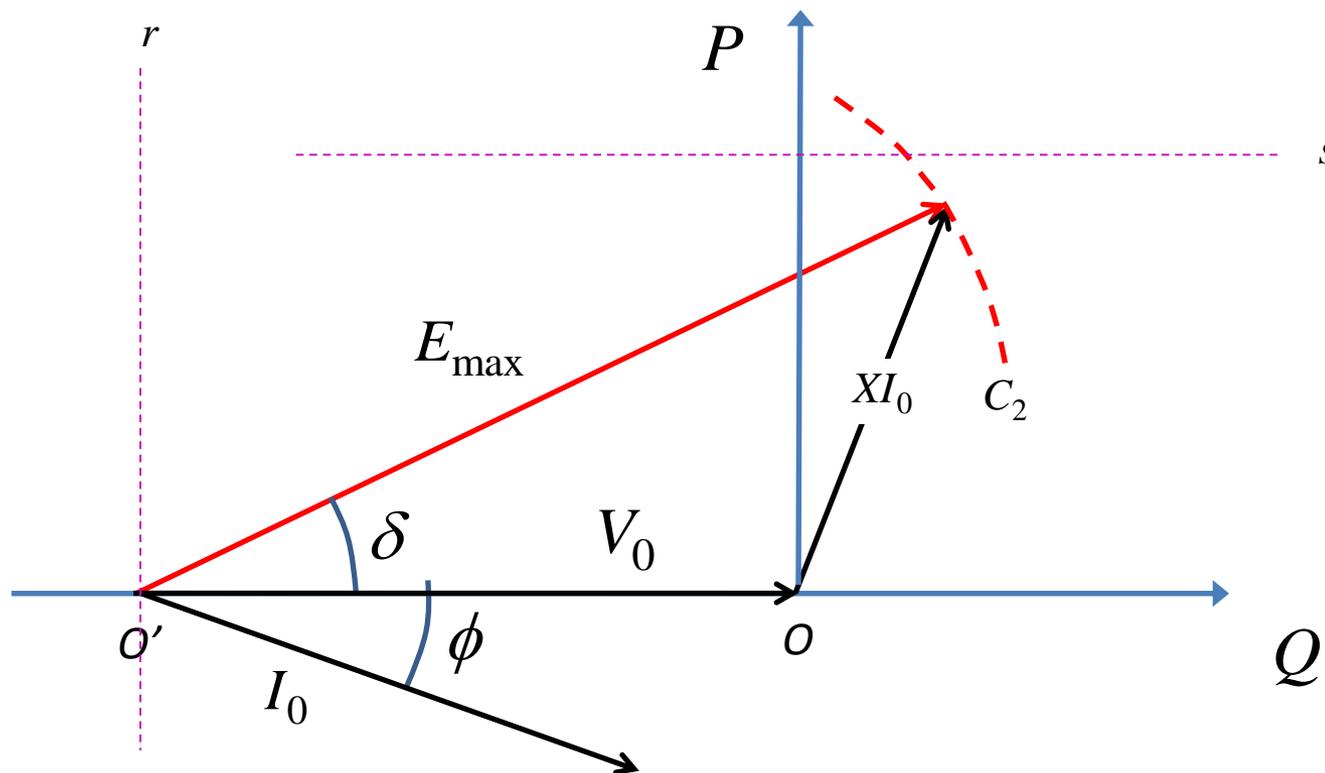


Fig. 19

Il limite sulla potenza massima del motore primo è rappresentato da una retta orizzontale come s .

In definitiva si giustifica la forma tipica del «diagramma di capability».

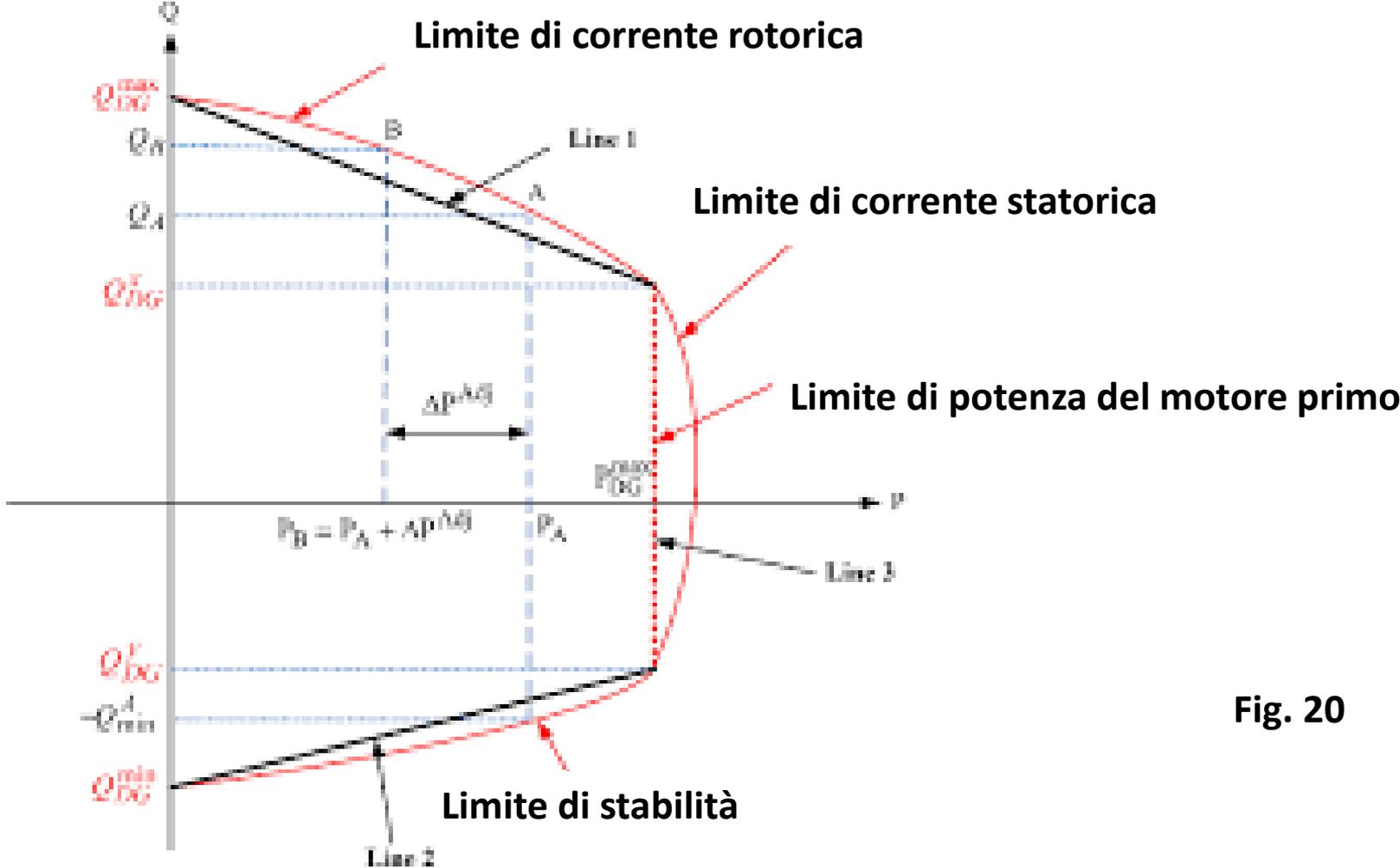


Fig. 20

In generale, si ha che la potenza reattiva positiva (su carico RL) per generatore sovr eccitato è limitata dalla corrente di eccitazione, mentre la potenza reattiva negativa (su carico RC) per generatore sottoeccitato è limitata dal limite di stabilità.

Invece la potenza massima erogabile è usualmente limitata dal limite di corrente di statore.

TRANSITORIO DI CORTO CIRCUITO

Ipotizziamo che un generatore sincrono, che lavora a regime a tensione V_0 , sia soggetto ad un corto circuito improvviso ai morsetti di statore, ad esempio a causa di un guasto trifase. Risolvendo analiticamente il modello dinamico (si omettono i passaggi) è possibile dimostrare che la corrente di corto circuito che si crea ha l'andamento mostrata di seguito.

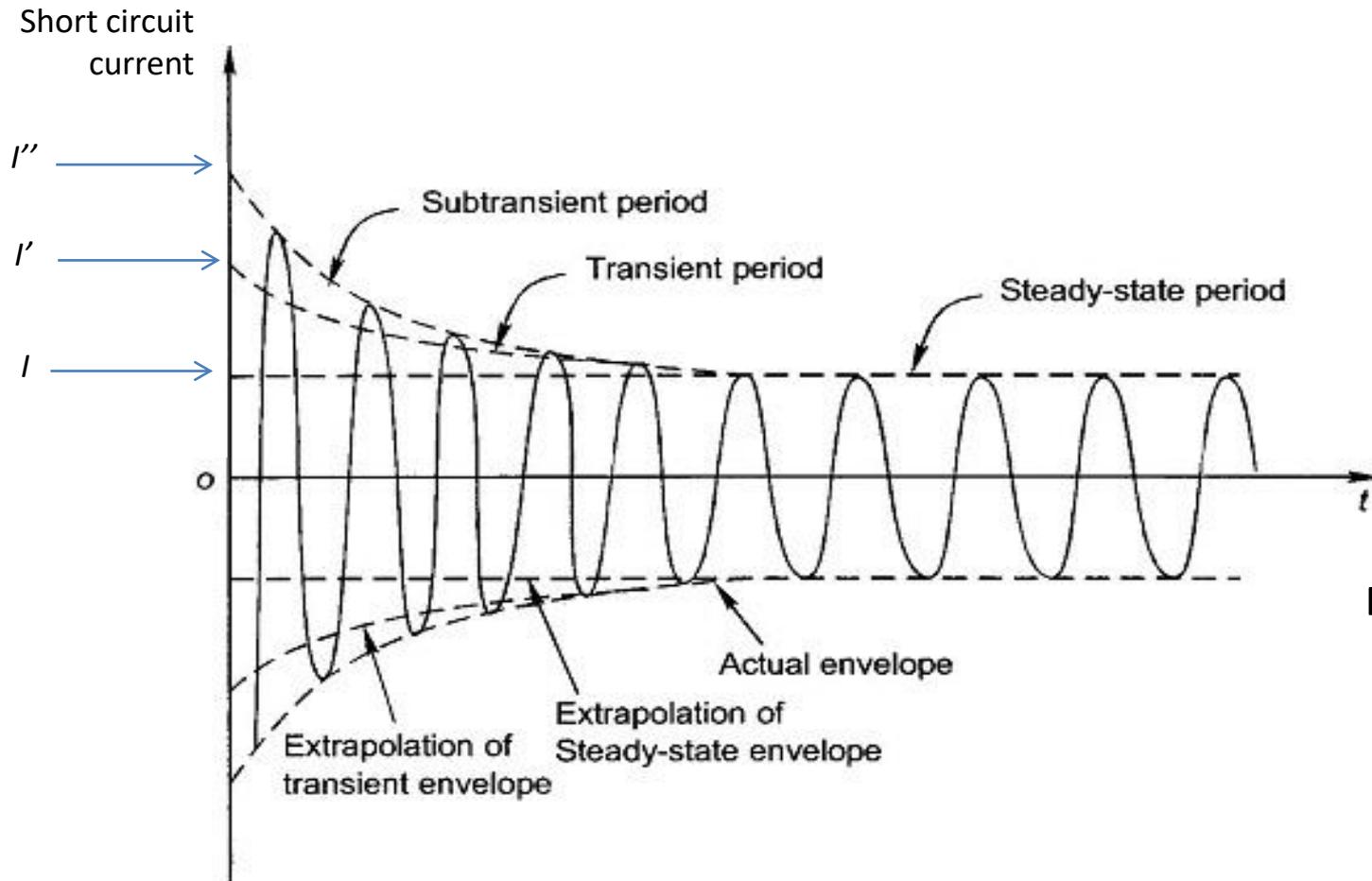


Fig. 21

L'espressione della corrente di corto circuito si dimostra essere:

$$i_{ss}(t) = V_0 \left\{ \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T'_d}} + \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X'_d} \right) e^{-\frac{t}{T''_d}} \right] \sin(\Omega t) \right\} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{2}I \sin(\Omega t)}_{\text{corrente di c.c. a regime}} + \underbrace{\sqrt{2}(I' - I)e^{-\frac{t}{T'_d}} \sin(\Omega t)}_{\text{corrente di c.c. transitoria}} + \underbrace{\sqrt{2}(I'' - I')e^{-\frac{t}{T''_d}} \sin(\Omega t)}_{\text{corrente di c.c. subtransitoria}} \quad (129)$$

$$I \triangleq \frac{V_0}{X_d}$$

(130)

Reattanza sincrona di
asse diretto

$$I' \triangleq \frac{V_0}{X'_d}$$

(131)

Reattanza transitoria

$$(133) \quad X'_d \triangleq X_{os} + \frac{X_{\sigma f} X_{md}}{X_{\sigma f} + X_{md}}$$

$$I'' \triangleq \frac{V_0}{X''_d}$$

(132)

Reattanza subtransitoria

(134)

$$X''_d = X_{os} + \frac{X_{md} X_{\sigma kd} X_{\sigma f}}{X_{md} L_{\sigma kd} + X_{md} X_{\sigma f} + X_{\sigma kd} X_{\sigma f}}$$

$$\left(X_{md} = \frac{3}{2} L_{md} \right) \quad (135)$$

T'_d Costante di tempo transitoria: ordine di grandezza di secondi

T''_d Costante di tempo sub-transitoria: ordine di grandezza decimi di secondo

Si vede dalla (132) che l'ampiezza del primo picco di corrente è inversamente proporzionale alla reattanza subtransitoria.

I valori di reattanza subtransitoria sono tali che, usualmente, il primo picco della corrente di corto circuito è dell'ordine di dieci volte la corrente nominale.