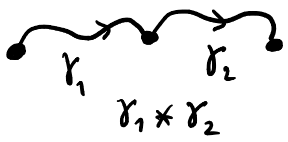
Concatenazione e inversione di cammini

Def Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ due cammini sullo spazio X t.c. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Il cammino $\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ definito come

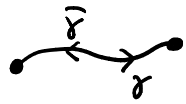
$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



è detto <u>concatenazione</u> (o <u>prodotto</u>) di γ_1 e γ_2.

OSS Questa operazione <u>non</u> è commutativa.
Si ha $(\gamma_1 * \gamma_2)(0) = \gamma_1(0)$, $(\gamma_1 * \gamma_2)(1) = \gamma_2(1)$.
$\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ è continua.

Def Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ un cammino. Il cammino $\bar{\gamma} : [0,1] \longrightarrow X$, $\bar{\gamma}(t) \overset{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ è detto <u>inverso</u> di γ.



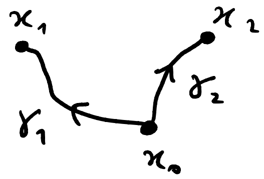
Def Uno spazio X è detto
i) <u>localmente connesso</u> se ogni punto di X ammette una <u>base d'intorni connessi</u>;
ii) <u>localmente connesso per archi</u> se ogni punto di X ammette una <u>base d'intorni connessi per archi</u>.

Teorema Sia X uno spazio e sia $x_0 \in X$ un punto. Supponiamo che $\forall x \in X$ $\exists$ $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ cammino t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$. Allora X è connesso per archi.

Dim $x_1, x_2 \in X \Rightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ cammini t.c.

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_1(1) = x_1$, $\gamma_2(1) = x_2$

$\Rightarrow \gamma := \bar{\gamma}_1 * \gamma_2$ cammino tra x_1 e x_2.



Teorema Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora X è connesso per archi.

Dim Fissiamo $x_0 \in X \rightsquigarrow$

$$T \overset{def}{=} \{ x \in X \mid \exists\, \gamma \text{ cammino in } X \text{ tra } x_0 \text{ e } x \}$$

1) $x_0 \in T$ infatti $\exists$ il cammino costante.

2) T è connesso per archi, infatti $\forall x \in T$ $\exists\, \gamma : [0,1] \to X$ cammino tra x_0 e x. Allora $\gamma([0,1]) \subset T$, infatti $\forall a \in [0,1] \rightsquigarrow \gamma_a : [0,1] \to X$, $\gamma_a(t) := \gamma(at)$ cammino tra $\gamma_a(0) = x_0$ e $\gamma_a(1) = \gamma(a) \Rightarrow \gamma(a) \in T$. Quindi T è connesso per archi per il teorema.

3) T è aperto, infatti $\forall x \in T$ $\exists\, U \subset X$ intorno connesso per archi di x: $\forall y \in U$ $\exists\, \mu : [0,1] \to U$ cammino tra x e y. Sia $\gamma : [0,1] \to X$ cammino tra x_0 e x $\Rightarrow \gamma * \mu$ cammino tra x_0 e $y \Rightarrow y \in T \Rightarrow U \subset T$ e quindi T è aperto.

4) T è chiuso, infatti $\forall y \in X - T$ $\exists\, U \subset X$ intorno connesso per archi di $y \Rightarrow U \subset X - T$, infatti se per assurdo $\exists\, x \in U \cap T$, con le notazioni del punto 3), avremmo $\gamma * \mu$ cammino tra x_0 e y contraddizione.

Quindi $X - T$ è aperto $\Rightarrow$ T chiuso.

5) $T = X$ perché $T \neq \phi$ è aperto e chiuso e X è connesso. Quindi X è connesso per archi.

Teorema Supponiamo che $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ sia unione di sottospazi topologici t.c. $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \phi$.

i) se X_i è connesso $\forall i \in I$ allora X è connesso;

ii) se X_i è connesso per archi $\forall i \in I$ allora X è connesso per archi.

Dim Sia $x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$

i) Supponiamo $X = U \cup V$ con U e V aperti t.c. $U \cap V = \phi$, e con $x_0 \in U$. E' sufficiente dimostrare che $U = X$.

$U_i = X_i \cap U$ aperto e chiuso in X_i e $x_0 \in U_i$ $\forall i$

$\Rightarrow U_i = X_i$ perché X_i è connesso $\forall i \in I$ $\Rightarrow$

$U = \bigcup_{i \in I} U_i = X$.

ii) $\forall x \in X$ $\exists i \in I$ t.c. $x \in X_i \Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \to X_i \subset X$ cammino tra x_0 e x.

Def Sia X uno spazio e $x \in X$. Il sottospazio

$$\mathcal{C}_x(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in A \subset X \\ A \text{ connesso}}} A \subset X$$

è chiamato <u>componente connessa</u> di $x \in X$.

Poniamo $\mathcal{C}(X) \overset{\text{def}}{=} \{ \mathcal{C}_x(X) \mid x \in X \}$.

$\mathcal{C}(X)$ è l'insieme delle componenti connesse di X.

Def Sia X uno spazio e $x \in X$. Il sottospazio

$$\mathcal{P}_x(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in A \subset X \\ A \text{ conn. p.a.}}} A \subset X$$

è chiamato componente connessa per archi di $x \in X$.

Poniamo $\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{ \mathcal{P}_x(X) \mid x \in X \}$.

$\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X.

Teorema Sia X uno spazio e sia $x \in X$. Allora

i) $x \in \mathcal{C}_x(X)$ e $x \in \mathcal{P}_x(X)$;

ii) $\mathcal{C}_x(X)$ è chiuso e connesso;

iii) $\mathcal{P}_x(X)$ è connesso per archi;

iv) $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$

v) $\mathcal{C}_x(X) \cap \mathcal{C}_y(X) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}_x(X) = \mathcal{C}_y(X)$

vi) $\mathcal{P}_x(X) \cap \mathcal{P}_y(X) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X)$.

OSS $\mathcal{C}_x(X)$ è il più grande sottospazio connesso di X che contiene x.

$\mathcal{P}_x(X)$ è il più grande sottospazio connesso per archi di X che contiene x.

Dim i) ovvio

ii) $\mathcal{C}_x$ è connesso per il teorema precedente $\Rightarrow$ $\mathrm{Cl}_X \mathcal{C}_x$ è connesso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_x$ chiuso.

iii) e iv) immediate

v) $C_x(X) \cap C_y(X) \neq \emptyset \implies C_x(X) \cup C_y(X)$ connesso

vi) simile a v).

<u>OSS</u> 1) $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{P}(X)$ sono partizioni di X.

2) $\# \mathcal{C}(X) < \infty \implies C_x(X)$ aperto (e chiuso) $\forall x \in X$

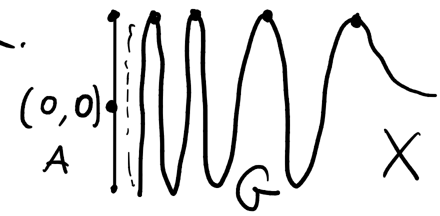
3) In generale $C_x(X)$ e $P_x(X)$ non è detto che siano aperto, es. $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

$C_0(X) = P_0(X) = \{0\}$ non è aperto.

<u>Esempio standard</u> $G = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$$A = \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2, \quad X = A \cup G \subset \mathbb{R}^2$$

$G \cong \,]0, +\infty[$ e A sono connessi p.a.



$X = Cl_{\mathbb{R}^2}(G)$ connesso

X non connesso p.a. infatti se per assurdo

$\exists\, \gamma : [0,1] \to X, \ \gamma(0) = (0,0), \ \gamma(1) \in G$

$\implies T = \gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ chiuso, $0 \in T$

T compatto $t_0 = \max T < 1$ (perché $\gamma(1) \in G$)

$\rightsquigarrow \mu = \gamma| : [t_0, 1] \to X$ soddisfa $\mu^{-1}(A) = \{t_0\}$.

$(a, \sin \frac{1}{a}) = \mu(1) \implies$

$$\mu(\,]t_0, 1]\,) = \{(x,y) \in G \mid 0 < x \leq a\}$$

infatti G meno un punto non è connesso per archi

mentre $\mu(\,]t_0, 1])$ è connesso per archi $\implies$

$\exists \, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \,]t_0, 1]$ t.c. $\mu(t_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right)$ e

$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, impossibile perché

$$\lim_{n\to\infty} \mu(t_n) = (0,1) \neq \mu(t_0).$$

$\mathcal{C}(X) = \{X\}$, $\mathcal{P}(X) = \{A, G\}$

X è connesso ma non è connesso per archi. Inoltre la componente connessa per archi G di X non è chiusa.

Teorema Sia X uno spazio.

i) Se X è localmente connesso allora le componenti connesse di X sono aperte e quindi X è unione topologica delle sue componenti connesse.

ii) Se X è localmente connesso per archi allora le componenti connesse per archi sono aperte e coincidono con le componenti connesse.

Dim i) $y \in \mathcal{C}_x(X) \Rightarrow \exists \, U \subset X$ intorno connesso di $y \Rightarrow U \cup \mathcal{C}_x(X)$ connesso $\Rightarrow$
$U \cup \mathcal{C}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$ che è quindi aperto $\Rightarrow X$ è unione topologica delle sue componenti connesse.

ii) X loc. connesso p.a. $\Rightarrow X$ loc. connesso $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ aperto $\forall x \in X \Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ loc. connesso p.a. (e connesso) $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ connesso p.a. $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$.