

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{y+1}{y} - \frac{1}{\log(y+1)} \right] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{y+1}{y} - \frac{1}{\log(y+1)} \right] =$$

$y = x - 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0^+$

$\frac{1}{y} \rightarrow \infty$
 $\frac{1}{\log(y+1)} \rightarrow \infty$
 $\infty - \infty$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left(y+1 - \frac{y}{\log(y+1)} \right) \quad \text{L'H} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{\log(y+1) - y}{y+1}}{[\log(y+1)]^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \log x - (x-1)}{(x-1) \log x} \quad \text{L'H} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log x + \cancel{x} - 1}{\log x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x)}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

⚠ Errore correggi

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ ogni suo primitivo è una funzione antiderivata

FALSO!

$$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x \text{ è una primitiva di } e^x \quad D(e^x) = e^x$$

Non esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale da

$$e^x = \int_{x_0}^x e^t dt \quad !$$

$\nearrow$

$$e^x > 0 \quad \forall x! \quad F_{x_0}(x_0) = 0$$

Vero: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuo; si F è una primitiva di f ,
per ogni $x_0 \in I$ esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$$

Dim $D \left[\int_{x_0}^x f(t) dt \right] = f(x)$ quindi $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ è una
primitiva di $f(x)$ e quindi $F(x) - F_{x_0}(x)$ è costante.

Il calcolo degli integrali / primitive

Alcune primitive immediate

$$\text{D } x^{\alpha+1} = (\alpha+1) x^{\alpha} \quad \leadsto \quad \text{Una primitiva di } x^{\alpha} \text{ è } x^{\alpha+1} \frac{1}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$$

$$\text{" } x^{-1} \text{ è } \log x \quad x \in]0, +\infty[$$

$$\text{" } x^{-1} \text{ è } \log(-x) \quad x \in]-\infty, 0[$$

$$\text{D } a^x = a^x (\log a) \quad \text{" di } a^x \text{ è } \frac{a^x}{\log a}$$

$$a > 0 \quad a \neq 1$$

$$\text{e } a = 1 \quad a^x = 1 \text{ costante} \quad \leadsto \quad \text{una primitiva è } x$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

Una primitiva di $\cos x$ è $\sin x$

" $\sin x$ è $-\cos x$

" $\frac{1}{1+x^2}$ è $\arctan x$

" $\sinh x$ è $\cosh x$

" $\cosh x$ è $\sinh x$

" $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è $\arcsin x$ $x \in]-1, 1[$

" $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è $\arccos x$

Uno primitivo di $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ è $\sinh x = \sinh^{-1} x$

⚠ A proposito dell'integrale indefinito $\int f(x) dx$

Per definizione si pone $\int f(x) dx = \{ F : F \text{ è una primitiva di } f \}$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{No!}$$

$$\int \cos x dx = \{ \sin x + C, C \in \mathbb{R} \}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \log |x| + C \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{è falso!}$$

↑ dominio? se dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \log(-x) + a & a \in \mathbb{R} & x < 0 \\ \log(x) + b & b \in \mathbb{R} & x > 0 \end{cases}$$

su $]0, +\infty[$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

su $]-\infty, 0[$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Linieritõ

$$\int_0^1 [3 \cos x + 4 \cdot 2^{-x}] dx = 3 \int_0^1 \cos x dx + 4 \int_0^1 2^{-x} dx =$$

$$= 3 \cdot \left[\sin x \right]_0^1 + 4 \cdot \left[2^{-x} \cdot \left(-\frac{1}{\log 2} \right) \right]_0^1 = 3 \sin 1 + 4 \left(-\frac{1}{\log 2} \right) \left(2^{-1} - 1 \right) = 3 \sin(1) + \frac{2}{\log 2}$$

↑

Määratõ

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2} \right)^x \rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^x \frac{1}{\log \frac{1}{2}} =$$

$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$2^{-x} \frac{1}{-\log 2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad a^x$$

Integrazione per parti

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Supponiamo $f, g \in C^1$; allora $\frac{d}{dx} (f \cdot g)(x)$ è continua

$$\int_a^b \underbrace{\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x))}_1 dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

$f(x) \cdot g(x)$ è una primitiva di $\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)]$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) dx = \underbrace{\int_a^b f'(x) g(x) dx}_\uparrow + \underbrace{\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx}_\uparrow$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Ex:

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f'(x)$ $g(x)$ $f(x)$ $g'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{2} x^2$

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx$$

$$\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} [4 - 1] = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} 4 \log 2 - 0 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

$$\hat{=} \int_1^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Si calcoli una primitiva di $f(x) = \log x$ su $]0, +\infty[$

Per esempio $F(x) = \int_1^x \log t \, dt$

è un prodotto!

posso scegliere qualunque $x_0 > 0$

$$\int_1^x t \cdot \log t \, dt = \left[t \cdot \log t \right]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$t = f'(t) \quad g(t)$$

$$f(t) = t$$

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) \, dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t) \cdot g'(t) \, dt$$

$$= x \log x - \int_1^x dt = x \log x - \left[t \right]_1^x = \boxed{x \log x - x + 1}$$

$x \log x$

??

powe dūbro

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \quad \rightarrow \quad x \log x - x$$

↑
integrals indefinite

curriculum

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x dx = ??$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 $f'(x)$ $g(x)$
 $f(x) = \frac{1}{2} x^2$

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \int_{-1}^1 e^x x dx = \left[e^x \cdot x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = e + e^{-1} - e + e^{-1} = 2/e$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 $f'(x)$ $g(x)$
 $f(x) = e^x$

$$\int_a^b x^n e^x$$

Integrale per sostituzione

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

se $F(y)$ è una primitiva di $f(y)$ $F'(y) = f(y)$, si ottiene che la funzione

$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ è la derivata della funzione $F(\varphi(x))$

ossia $F(\varphi(x))$ è una primitiva di $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Teorema

Siano $\varphi: J \rightarrow I$ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi \in C^1(J)$ $f \in C(I)$

Siano $\alpha, \beta \in J$ tali che $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ $a, b \in I$. Allora

$$\int_a^b f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

sen(x) - 2x

Dim Sia F una primitiva di f ; allora $\int_a^b f(y) dy = F(b) - F(a) =$
 $= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dx} (F \circ \varphi)(x) dx =$
 $= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$

i vediamo!

Esempi

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(y)} \cdot \underbrace{2x}_{\varphi'(x)} dx$$

$f(y) = \sin y$
 $\varphi(x) = x^2 \quad f(\varphi(x))$

$$= \int_0^{\pi^2/4} \sin(y) dy = \left[-\cos(y) \right]_0^{\pi^2/4} = 1 - \cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$a = 0 \quad \varphi(a) = a = 0$$

$$b = \pi/2 \quad b = \varphi(b) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^1 2^{-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \right]_0^1 = \frac{1}{-\log 2} \left[\frac{1}{2} - 1 \right]$$

$$\int_0^1 2^{-x} dx = - \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f(\varphi(x))}}{2^{-x}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi'(x)}}{(-1)} dx = - \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=-1} 2^y dy = \int_{-1}^0 2^y dy = \frac{1}{\log 2} \left[1 - \frac{1}{2} \right]$$

$$f(y) = 2^y$$

$$y = -x$$

$$\varphi(x) = -x$$

$$\varphi'(x) = -1$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$$\int_0^{\pi/3} \lg x \, dx = - \int_0^{\pi/3} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = - \int_0^{\pi/3} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f(\varphi(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\varphi'(x)} \, dx = - \int_1^{1/2} \frac{1}{y} \, dy =$$

$f(y) = \frac{1}{y}$ $\varphi(x) = \cos x$

$$= - \left[\log y \right]_1^{1/2} = - \log \frac{1}{2} = \log 2$$

Método "comodo"

$$- \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\underbrace{\cos x}_y} \cdot (-\sin x) \, dx \stackrel{dy}{=} - \int_1^{1/2} \frac{1}{y} \, dy$$

$$y = \cos x$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\varphi'(x) = -\sin x$$

i un simbolo!



$$dy = -\sin x \, dx$$

Ex:

$$\int_0^1 e^{\overbrace{x^2+x}} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ e^y}}{e^{x^2+x}} \cdot \underbrace{(2x+1) dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int_{\substack{\uparrow 0 \\ x=0}}^{\substack{\uparrow 2 \\ x=1}} e^y dy =$$

$$y = x^2 + x$$

$$dy = (2x+1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^y \right]_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^2 + x & \varphi'(x) &= 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ f(y) &= e^y & \varphi(1) &= 2 \\ & & \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=2} f(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 e^y dy$$