ANALISI AMMORTIZZATA
ALBERI SPLAY: ANALISI

INFORMATICA

ANALISI AMMORTIZZATA

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- Possiamo valutare sequenze di operazioni invece di singole operazioni
- Data una sequenza di m operazioni su una struttura dati, valutiamo il loro costo computazionale $T(m)$

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- Possiamo valutare sequenze di operazioni invece di singole operazioni
- Data una sequenza di m operazioni su una struttura dati, valutiamo il loro costo computazionale $T(m)$
- Il costo ammortizzato di una singola operazione è quindi dato da $\frac{T(m)}{m}$
- Questo anche se la singola operazione ci può mettere di più!

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- In poche parole, se anche abbiamo alcune delle operazioni che sono costose, il loro costo è *ammortizzato* da molte operazioni poco costose
- Ci sono tre principali metodi per compiere una analisi ammortizzata del tempo di calcolo:

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- In poche parole, se anche abbiamo alcune delle operazioni che sono costose, il loro costo è *ammortizzato* da molte operazioni poco costose
- Ci sono tre principali metodi per compiere una analisi ammortizzata del tempo di calcolo:
  - Metodo dell'aggregazione (*aggregate analysis*)

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- In poche parole, se anche abbiamo alcune delle operazioni che sono costose, il loro costo è *ammortizzato* da molte operazioni poco costose
- Ci sono tre principali metodi per compiere una analisi ammortizzata del tempo di calcolo:
  - Metodo dell'aggregazione (*aggregate analysis*)
  - Metodo del banchiere (*accounting method*)

ANALISI DI SEQUENZE DI OPERAZIONI

- In poche parole, se anche abbiamo alcune delle operazioni che sono costose, il loro costo è *ammortizzato* da molte operazioni poco costose
- Ci sono tre principali metodi per compiere una analisi ammortizzata del tempo di calcolo:
  - Metodo dell'aggregazione (*aggregate analysis*)
  - Metodo del banchiere (*accounting method*)
  - Metodo del potenziale (*potential method*)

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Data una sequenza di m operazioni, vogliamo trovare il tempo $T(m)$ che queste m operazioni richiedono nel caso peggiore

Indicheremo con $c_1, c_2, \ldots, c_m$ is costo delle m operazioni

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Data una sequenza di m operazioni, vogliamo trovare il tempo $T(m)$ che queste m operazioni richiedono nel caso peggiore

Indicheremo con $c_1, c_2, \ldots, c_m$ is costo delle m operazioni

Ne segue che $T(m) = \sum_{i=1}^{m} c_i$

ALGORITMO D'ESEMPIO PER LO STUDIO

ALGORITMO D'ESEMPIO PER LO STUDIO

- Come algoritmo di esempi consideriamo uno stack implementato come array

ALGORITMO D'ESEMPIO PER LO STUDIO

- Come algoritmo di esempi consideriamo uno stack implementato come array
- Quando l'array è pieno, la sua dimensione viene raddoppiata tramite copia

ALGORITMO D'ESEMPIO PER LO STUDIO

- Come algoritmo di esempi consideriamo uno stack implementato come array
- Quando l'array è pieno, la sua dimensione viene raddoppiata tramite copia
- Le operazioni che possiamo svolgere sono push e pop

ALGORITMO D'ESEMPIO PER LO STUDIO

- Come algoritmo di esempi consideriamo uno stack implementato come array
- Quando l'array è pieno, la sua dimensione viene raddoppiata tramite copia
- Le operazioni che possiamo svolgere sono push e pop
- Qui valuteremo il costo ammortizzato di *m* operazioni di push (è lo worst case scenario)

ARRAY CON RADDOPPIO DI DIMENSIONE

3

`push(3)`

ARRAY CON RADDOPPIO DI DIMENSIONE

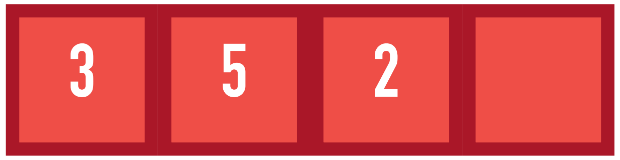
push(3)

push(5)

ARRAY CON RADDOPPIO DI DIMENSIONE

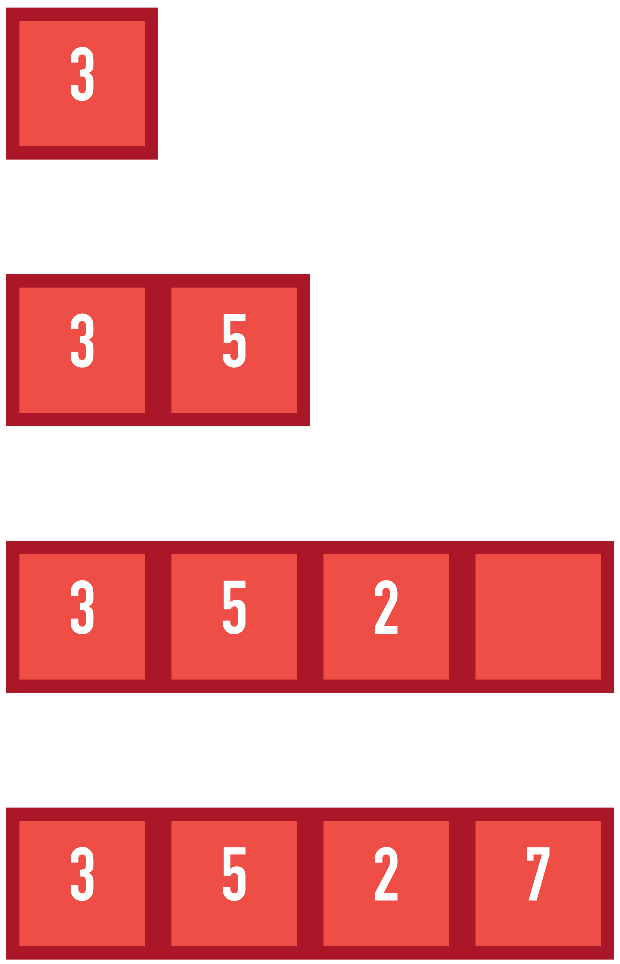
`push(3)`

`push(5)`



`push(2)`

ARRAY CON RADDOPPIO DI DIMENSIONE



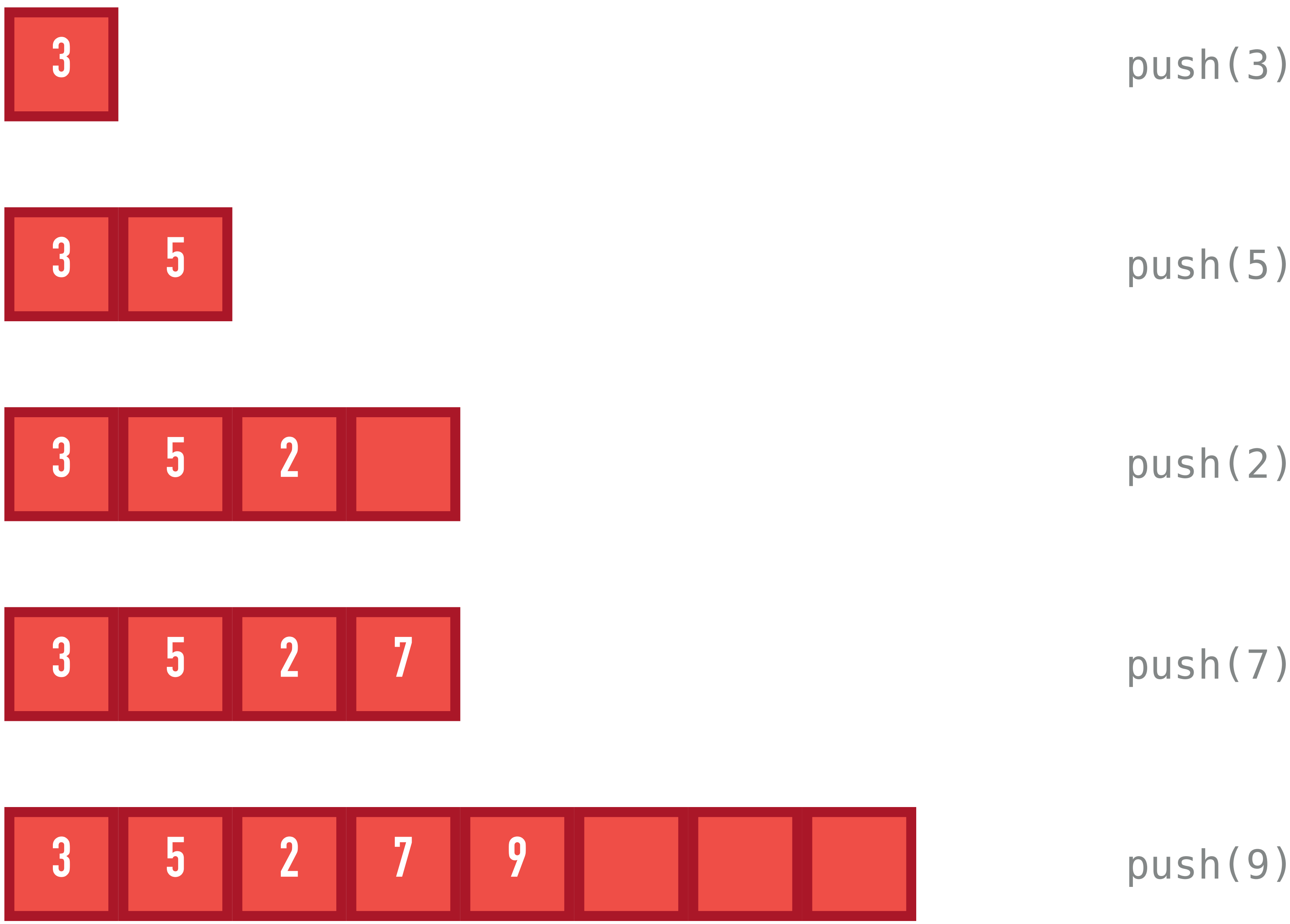
`push(3)`

`push(5)`

`push(2)`

`push(7)`

ARRAY CON RADDOPPIO DI DIMENSIONE



METODO DELL'AGGREGAZIONE

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Significa semplicemente che si calcola direttamente che valore assume $T(m)$ e poi si divide per m per trovare il costo ammortizzato

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Significa semplicemente che si calcola direttamente che valore assume $T(m)$ e poi si divide per m per trovare il costo ammortizzato

Valutiamo il costo dell'inserimento in un array:

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Significa semplicemente che si calcola direttamente che valore assume $T(m)$ e poi si divide per m per trovare il costo ammortizzato

Valutiamo il costo dell'inserimento in un array:

- Il costo di inserimento è 1 se non dobbiamo raddoppiare

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Significa semplicemente che si calcola direttamente che valore assume $T(m)$ e poi si divide per m per trovare il costo ammortizzato

Valutiamo il costo dell'inserimento in un array:

- Il costo di inserimento è 1 se non dobbiamo raddoppiare
- Altrimenti è pari al numero di elementi attualmente contenuti dell'array (dato che dobbiamo copiarli)

METODO DELL'AGGREGAZIONE

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Quindi il costo è $c_i = \begin{cases} i & \text{se } i-1 \text{ è una potenza di } 2 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Quindi il costo è $c_i = \begin{cases} i & \text{se } i-1 \text{ è una potenza di } 2 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Indichiamo con $d_i = c_i - 1$, ovvero d_i è il costo di copia degli elementi diversi da quello inserito

Ne segue che $d_i = \begin{cases} i-1 & \text{se } i-1 \text{ è una potenza di } 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

METODO DELL'AGGREGAZIONE

La somma $\sum_{i=1}^{m} c_i$ può essere quindi spezzata in due parti:

$$T(m) = \sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{i=1}^{m} d_i$$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

La somma $\sum_{i=1}^{m} c_i$ può essere quindi spezzata in due parti:

$$T(m) = \sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{i=1}^{m} d_i$$

Che corrisponde a $T(m) = m + \sum_{i=1}^{m} d_i$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

La somma $\sum_{i=1}^{m} c_i$ può essere quindi spezzata in due parti:

$$T(m) = \sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{i=1}^{m} d_i$$

Che corrisponde a $T(m) = m + \sum_{i=1}^{m} d_i$

Ricordiamo che $d_i = 0$ quando $i - 1$ non è una potenza di 2

METODO DELL'AGGREGAZIONE

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Maggioriamo la somma $\sum_{i=1}^{m} d_i$ con una somma di una quantità logaritmica di potenze di 2:

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j \text{ con } k = \lceil \log_2(m-1) \rceil$$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Maggioriamo la somma $\sum_{i=1}^{m} d_i$ con una somma di una quantità logaritmica di potenze di 2:

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j \text{ con } k = \lceil \log_2(m-1) \rceil$$

La somma delle prima k potenze di 2 è $2^{k+1} - 1$

Ma $2^{k+1} - 1 = O(m)$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Quindi $T(m) = m + O(m) = O(m)$

Il costo ammortizzato di una singola operazione è quindi costante: $\dfrac{O(m)}{m} = O(1)$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

Quindi $T(m) = m + O(m) = O(m)$

Il costo ammortizzato di una singola operazione è quindi costante: $\dfrac{O(m)}{m} = O(1)$

Conclusione: raddoppiando la dimensione quando l'array è pieno il costo ammortizzato di ogni singola operazione è costante

METODO DEL BANCHIERE

METODO DEL BANCHIERE

Il metodo del banchiere si basa sull'idea di associare ad ogni operazione un costo $\hat{c}_i$ che può essere diverso dal costo reale.

METODO DEL BANCHIERE

Il metodo del banchiere si basa sull'idea di associare ad ogni operazione un costo $\hat{c}_i$ che può essere diverso dal costo reale.

La differenza $\hat{c}_i - c_i$ può essere positiva (in questo caso l'operazione i-esima "deposita" la differenza di costo)

METODO DEL BANCHIERE

Il metodo del banchiere si basa sull'idea di associare ad ogni operazione un costo $\hat{c}_i$ che può essere diverso dal costo reale.

La differenza $\hat{c}_i - c_i$ può essere positiva (in questo caso l'operazione i-esima "deposita" la differenza di costo)

Se la differenza $\hat{c}_i - c_i$ è negativa, allora l'i-esima operazione deve "prelevare" usando quanto "depositato" dalle operazioni precedenti

METODO DEL BANCHIERE

METODO DEL BANCHIERE

Abbiamo quindi che, per ogni $1 \leq k \leq m$ deve valere che:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{c}_i - \sum_{i=1}^{k} c_i \geq 0,$$

ovvero ad ogni operazione abbiamo sempre “pagato” abbastanza da sostenere il costo (i.e., il bilancio è non negativo)

METODO DEL BANCHIERE

Abbiamo quindi che, per ogni $1 \leq k \leq m$ deve valere che:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{c}_i - \sum_{i=1}^{k} c_i \geq 0,$$

ovvero ad ogni operazione abbiamo sempre "pagato" abbastanza da sostenere il costo (i.e., il bilancio è non negativo)

Abbiamo quindi che per $k = m$ vale $\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$

e quindi $\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$ ci fornisce un upper bound per $T(m)$

METODO DEL BANCHIERE

Ovviamente dipende tutto dalla scelta dei diversi $\hat{c}_i$.

Se scegliamo valori troppo piccoli la disuguaglianza non vale e non otteniamo un bound per $T(m)$.

Se li scegliamo troppo grandi non otteniamo dei bound stretti per il costo ammortizzato.

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Per il nostro esempio scegliamo $\hat{c}_i = 3$ indipendentemente dall'operazione

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Per il nostro esempio scegliamo $\hat{c}_i = 3$ indipendentemente dall'operazione

Ipotesi: tutte le operazioni tra un raddoppio e il successivo "depositano" abbastanza per pagare il raddoppio

Consideriamo le prime i operazioni mostriamo che il bilancio rimane sempre non negativo.

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

$3 - 1 = 2$	operazione 1
$6 - (1 + 2) = 3$	operazione 2
$9 - (1 + 2 + 3) = 3$	operazione 3

Il bilancio rimane sempre positivo dopo le prime tre operazioni. Questo è il caso base.

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

$3 - 1 = 2$ operazione 1

$6 - (1 + 2) = 3$ operazione 2

$9 - (1 + 2 + 3) = 3$ operazione 3

Il bilancio rimane sempre positivo dopo le prime tre operazioni. Questo è il caso base.

Assumiamo quindi di avere bilancio non negativo dopo un'operazione di ridimensionamento e mostriamo che il bilancio acquisto durante le successive operazioni ci permette di "pagare" la successiva operazione di ridimensionamento

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo la variazione del bilancio tra l'operazione $k+2$ l'operazione $2k$ dove k è una potenza di 2 con $k \geq 2$.

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo la variazione del bilancio tra l'operazione $k+2$ l'operazione $2k$ dove k è una potenza di 2 con $k \geq 2$.

L'ultima operazione di ridimensionamento è stata con l'operazione $k+1$ e la prossima sarà all'operazione $2k+1$

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo la variazione del bilancio tra l'operazione $k + 2$ l'operazione $2k$ dove k è una potenza di 2 con $k \geq 2$.

L'ultima operazione di ridimensionamento è stata con l'operazione $k + 1$ e la prossima sarà all'operazione $2k + 1$

Quindi $\displaystyle\sum_{i=k+2}^{2k} \hat{c}_i - c_i = 3(2k - (k + 1)) - (2k - (k + 1)) = 2k - 2$

Questo è quanto "depositato" tra un'espansione e la successiva

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo ora l'operazione $2k + 1$, che è una espansione.

Il costo è $2k + 1$, ma:

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo ora l'operazione $2k + 1$, che è una espansione.

Il costo è $2k + 1$, ma:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \hat{c}_i - \sum_{i=1}^{2k+1} c_i \geq 2k - 1 + \hat{c}_{2k+1} - c_{2k+1} = 2k - 2 + 3 - (2k + 1) = 0$$

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

Consideriamo ora l'operazione $2k + 1$, che è una espansione.

Il costo è $2k + 1$, ma:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \hat{c}_i - \sum_{i=1}^{2k+1} c_i \geq 2k - 1 + \hat{c}_{2k+1} - c_{2k+1} = 2k - 2 + 3 - (2k + 1) = 0$$

Questo mostra che il bilancio rimane non negativo dopo l'operazione di ridimensionamento.

Quindi il costo ammortizzato $\hat{c}_i = 3$ è sufficiente

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

$$T(m) = \sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = 3m$$

Quindi il costo di una singola operazione è costante.

METODO DEL BANCHIERE - ESEMPIO

$$T(m) = \sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = 3m$$

Quindi il costo di una singola operazione è costante.

Nota: la parte difficile è la scelta di un buon costo $\hat{c}_i$ per le operazioni: usare 2 sarebbe stato troppo poco, usare m avrebbe funzionato ma ci avrebbe dato un risultato non stretto

METODO DEL POTENZIALE

Se le m operazioni che svolgiamo sono su una struttura dati che potenzialmente viene modificata da ogni operazione, otteniamo una sequenza stati della struttura dati:

$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m$ dove D_i è lo stato della struttura dati dopo l'esecuzione dell'i-esima operazione

D_0 è lo stato iniziale

D_m è lo stato finale

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Definiamo una funzione Φ che mappa gli stati della struttura dati in valori reali non negativi.

METODO DEL POTENZIALE

Definiamo una funzione Φ che mappa gli stati della struttura dati in valori reali non negativi.

La funzione Φ è detta **funzione potenziale** e $\Phi(D_i)$ è il **potenziale associato alla struttura dati** D_i

METODO DEL POTENZIALE

Definiamo una funzione Φ che mappa gli stati della struttura dati in valori reali non negativi.

La funzione Φ è detta **funzione potenziale** e $\Phi(D_i)$ è il **potenziale associato alla struttura dati** D_i

Definiamo quindi il costo ammortizzato come il costo reale sommato ad una variazione di potenziale:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Osserviamo ora come è definita la somma di tutti i costi ammortizzati

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}))$$

METODO DEL POTENZIALE

Osserviamo ora come è definita la somma di tutti i costi ammortizzati

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}))$$

La serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ è una serie telescopica:

$$\Phi(1) - \Phi(0) + \Phi(2) - \Phi(1) + \cdots + \Phi(m) - \Phi(m-1) = \Phi(m) - \Phi(0)$$

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Possiamo quindi riscrivere la somma dei costi ammortizzati come

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \Phi(D_m) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{m} c_i$$

METODO DEL POTENZIALE

Possiamo quindi riscrivere la somma dei costi ammortizzati come

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \Phi(D_m) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{m} c_i$$

E, quindi, il costo reale della sequenza di m operazioni come:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$$

ovvero la somma dei costi ammortizzati meno la differenza di potenziale (solitamente definiamo $\Phi(D_0) = 0$)

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Se riusciamo a definire $\Phi(D_m) \geq \Phi(D_0)$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \Phi(D_m) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{m} c_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$$

E quindi la somma dei costi ammortizzati ci fornisce un buon sulla somma dei costi reali

METODO DEL POTENZIALE

Se riusciamo a definire $\Phi(D_m) \geq \Phi(D_0)$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = \Phi(D_m) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{m} c_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$$

E quindi la somma dei costi ammortizzati ci fornisce un buon sulla somma dei costi reali

Come per i due metodi precedenti, la scelta della giusta funzione potenziale è quella che permette all'analisi del costo ammortizzato di funzionare.

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Nel nostro esempio scegliamo come funzione potenziale:

$\Phi(D_i) = 2i - k$

dove i è il numero di elementi contenuti nell'array e k è la dimensione dell'array

METODO DEL POTENZIALE

Nel nostro esempio scegliamo come funzione potenziale:
$\Phi(D_i) = 2i - k$
dove i è il numero di elementi contenuti nell'array e k è la dimensione dell'array

Notiamo che $\Phi(D_i) \geq 0$ per ogni $1 \leq i \leq m$, dato che ogni array è sempre pieno almeno per metà

Calcoliamo il costo ammortizzato di una operazione

METODO DEL POTENZIALE

METODO DEL POTENZIALE

Se l'operazione non richiede un incremento di dimensione dell'array allora:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + (2i - k) - (2(i-1) - k) = 3$$

METODO DEL POTENZIALE

Se l'operazione non richiede un incremento di dimensione dell'array allora:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + (2i - k) - (2(i-1) - k) = 3$$

Se invece fosse richiesto di incrementare la dimensione dell'array, allora la dimensione dell'array era $i - 1$ e quindi:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = i + (2i - 2(i-1)) - (2(i-1) - (i-1)) = 3$$

METODO DEL POTENZIALE

Se l'operazione non richiede un incremento di dimensione dell'array allora:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + (2i - k) - (2(i-1) - k) = 3$$

Se invece fosse richiesto di incrementare la dimensione dell'array, allora la dimensione dell'array era $i - 1$ e quindi:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = i + (2i - 2(i-1)) - (2(i-1) - (i-1)) = 3$$

Quindi otteniamo che il costo ammortizzato di ogni operazione rimane costante

ANALISI AMMORTIZZATA DEGLI ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Per calcolare il costo ammortizzato di una sequenza di m operazioni in un albero splay che contiene n elementi useremo il metodo del potenziale

Per fare questo dobbiamo definire una funzione potenziale.

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Definiamo:

size(x) come il numero di elementi contenuti nel sottoalbero a radice x

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Definiamo:

size(x) come il numero di elementi contenuti nel sottoalbero a radice x

Noi considereremo il rango di un nodo:
rank$(x) = \log_2($size$(x))$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Definiamo:

size(x) come il numero di elementi contenuti nel sottoalbero a radice x

Noi considereremo il rango di un nodo:
rank$(x) = \log_2(\text{size}(x))$

Il potenziale è definito quindi come la somma del rango di tutti i nodi dell'albero $\Phi(D_i) = \sum_{x \in D_i} \text{rank}(x)$

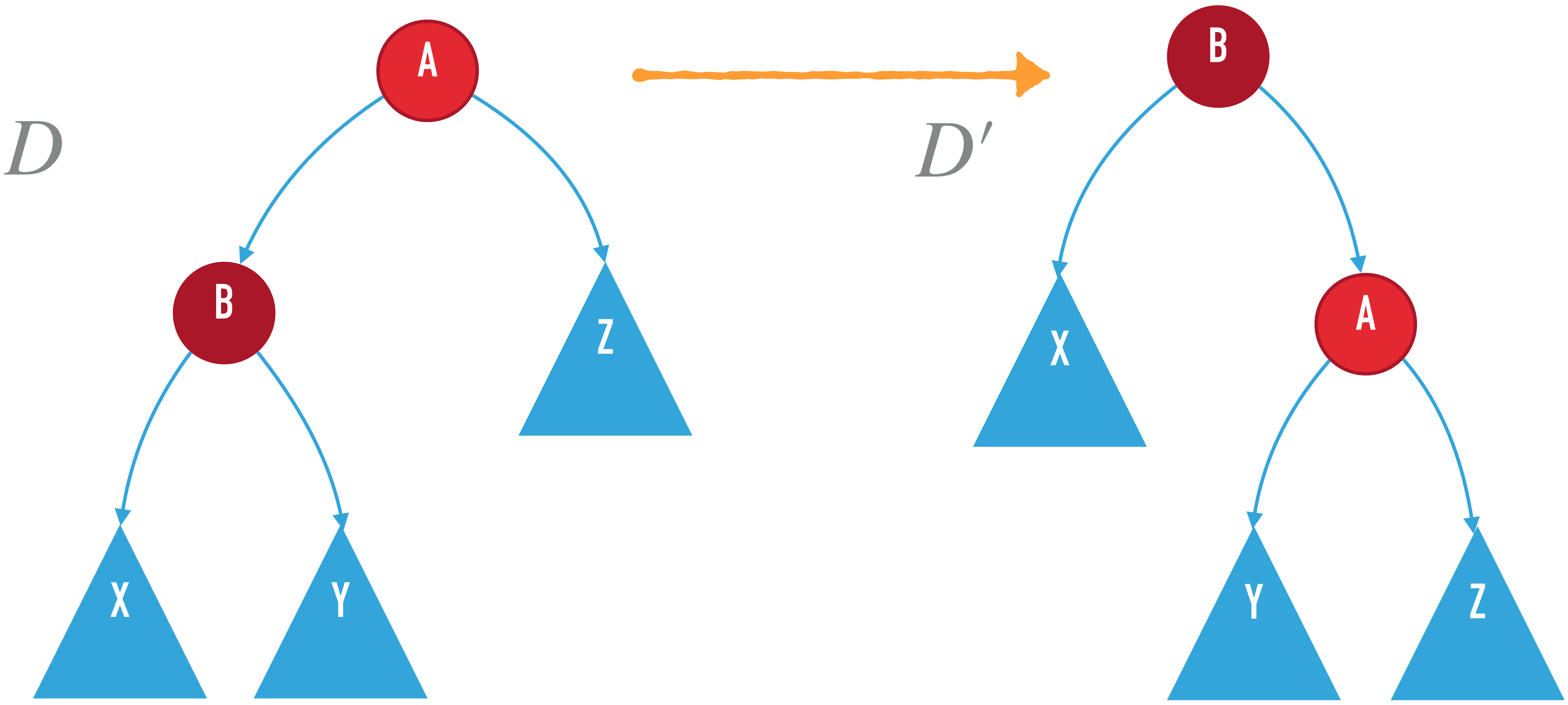
METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Studiamo ora come ognuna delle operazioni usate per spostare il nodo cercato alla radice modifica il potenziale.

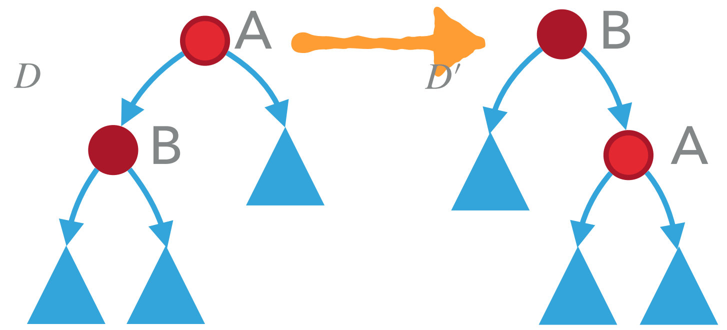
Le operazioni sono quindi zig, zig zig e zig zag. Ognuna di queste può però venire applicata più volte all'interno di una singola operazione c_i di ricerca.

CASO ZIG

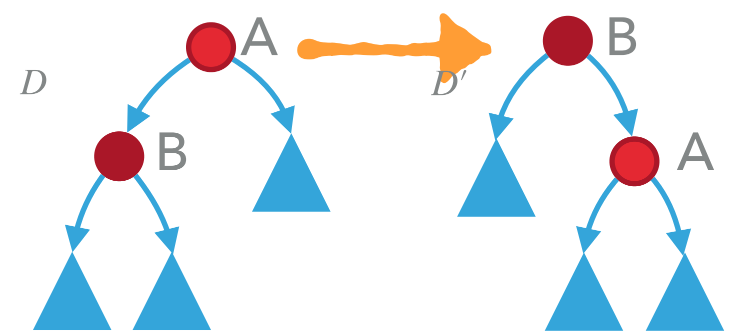
Il nodo da muovere è figlio sinistro della radice



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

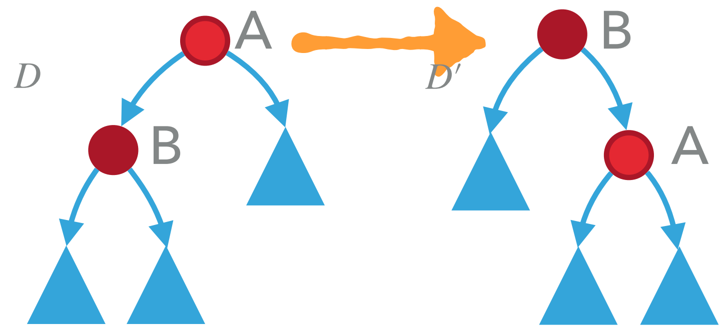


Per il caso zig la variazione di potenziale è

$$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$$

Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Per il caso zig la variazione di potenziale è

$\Phi(D') - \Phi(D) =$ rank'(A) + rank'(B) − rank(A) − rank(B)

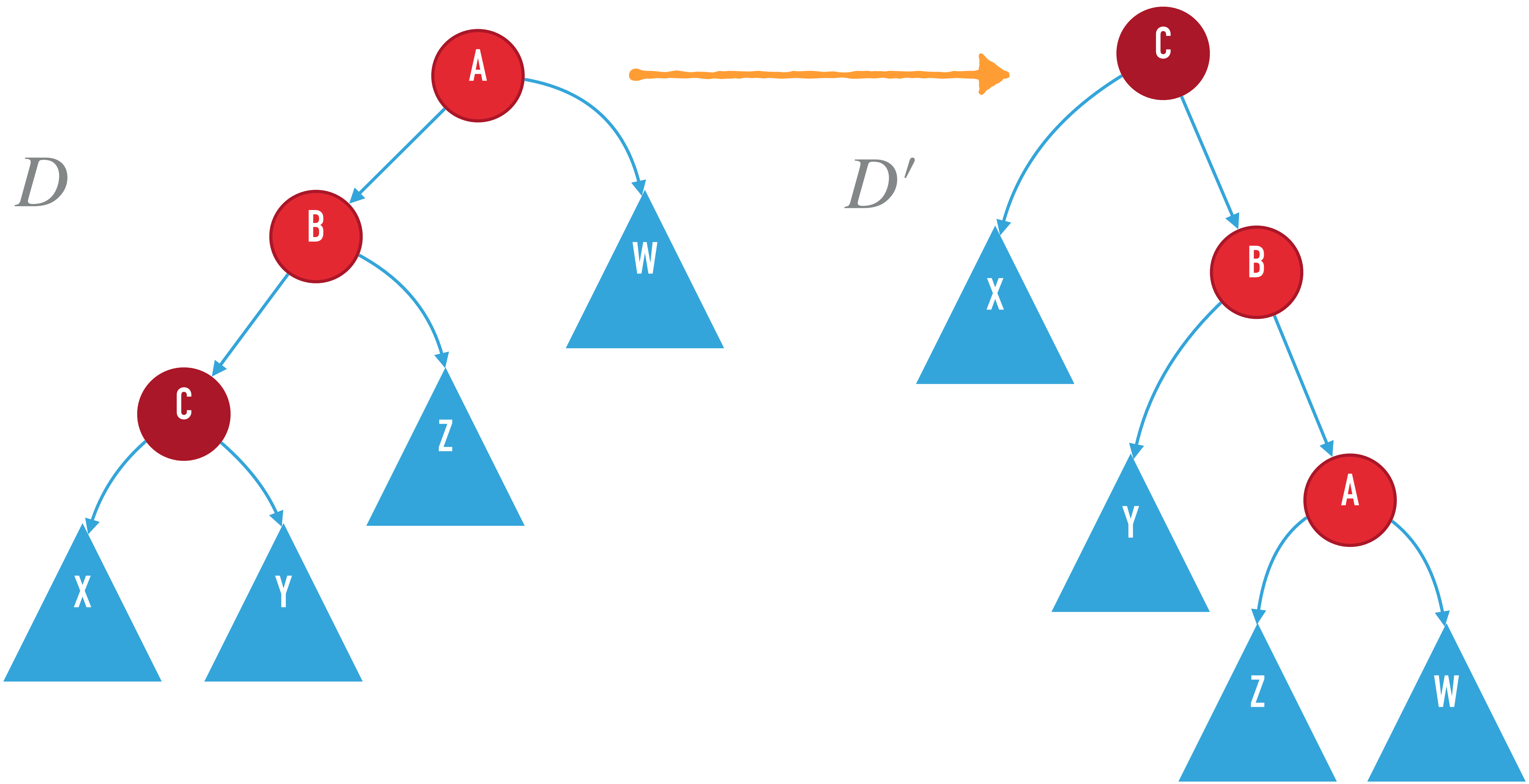
Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

Ma rank(A) = rank'(B), quindi $\Phi(D') - \Phi(D) =$ rank'(A) − rank(B)

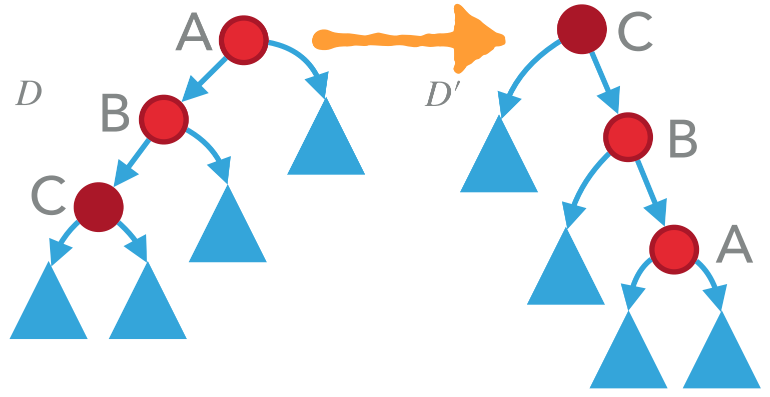
Dato che rank'$(A) \leq$ rank'(B) possiamo scrivere:
$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ rank'(B) − rank(B)
ovvero la variazione del rango solo del nodo cercato

CASO ZIG ZIG

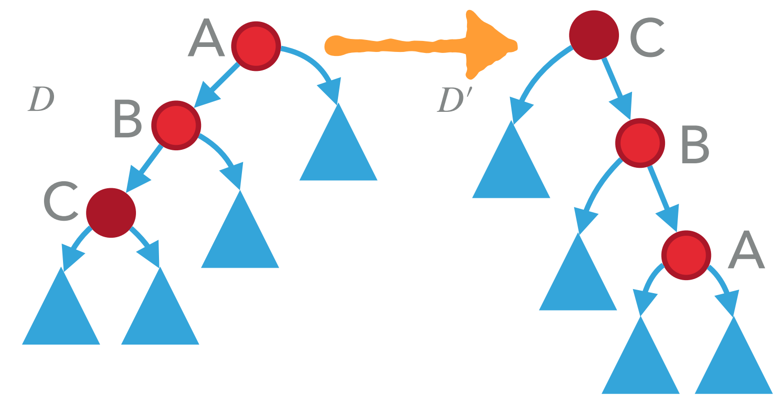
Il nodo da muovere è figlio sinistro di un nodo che è a sua volta figlio sinistro



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

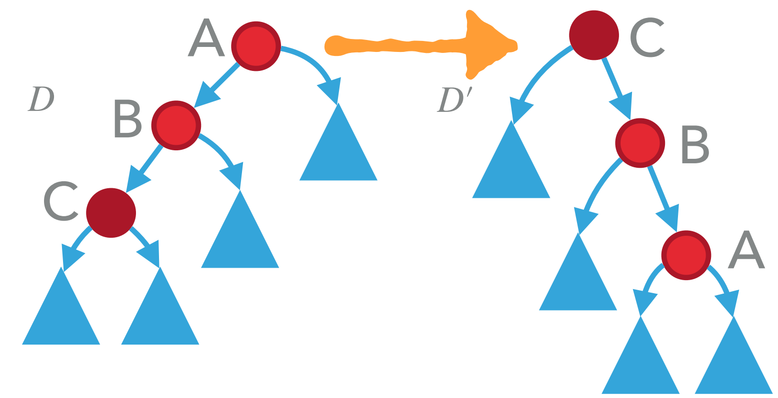


Per il caso zig zig la variazione di potenziale è

$$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) + \text{rank'}(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$$

Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Per il caso zig zig la variazione di potenziale è

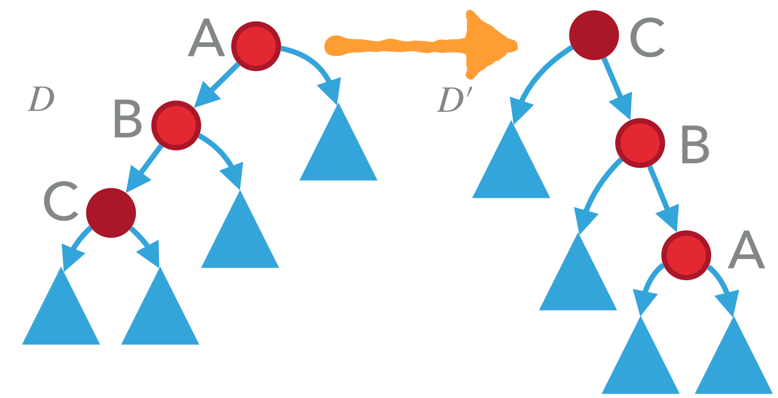
$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) + \text{rank'}(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

Ma $\text{rank}(A) = \text{rank'}(C)$, quindi

$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Per il caso zig zig la variazione di potenziale è

$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) + \text{rank'}(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

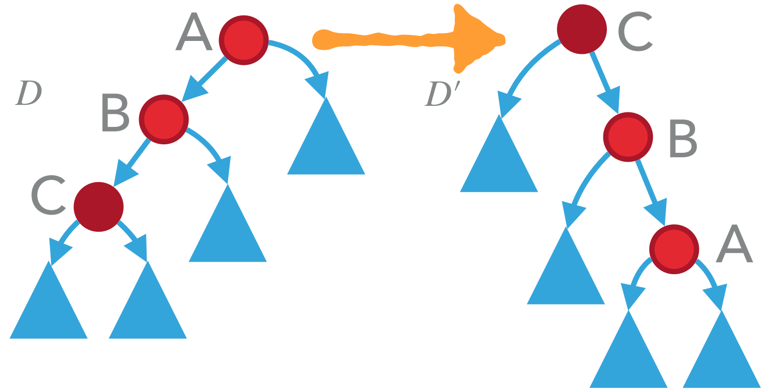
Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

Ma $\text{rank}(A) = \text{rank'}(C)$, quindi
$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

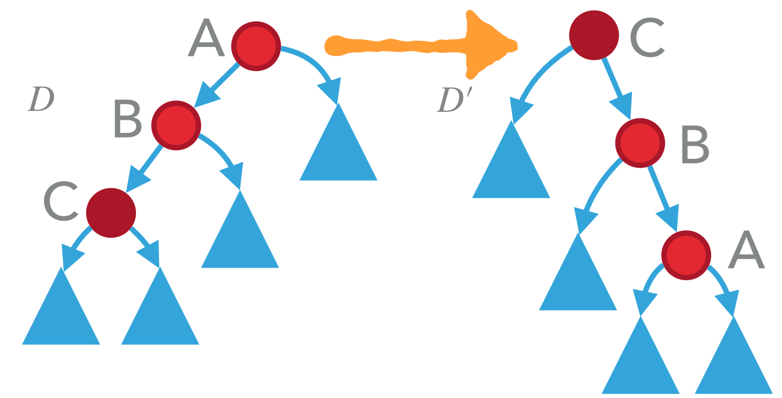
Ricordando che $\text{rank}(B) \geq \text{rank}(C)$:

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) - \text{rank}(C) - \text{rank}(C)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



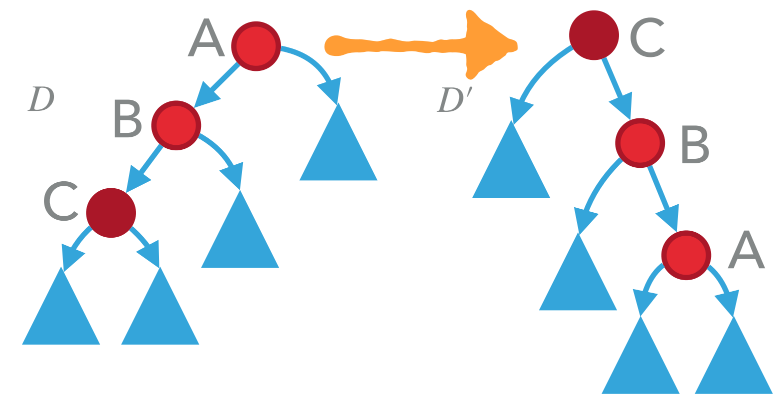
METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Ricordando anche che rank'$(B) \leq$ rank'(C):

$$\Phi(D') - \Phi(D) \leq \text{rank'}(A) + \text{rank'}(C) - 2\text{rank}(C)$$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



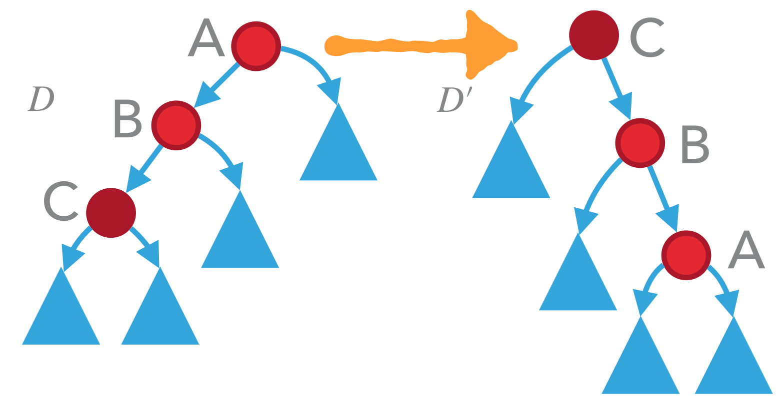
Ricordando anche che rank'(B) $\leq$ rank'(C):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ rank'(A) + rank'(C) − 2rank(C)

poiché rank'(C) > rank'(A):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq 2($rank'$(C)$ − rank$(C))$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Ricordando anche che rank'(B) $\leq$ rank'(C):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ rank'(A) + rank'(C) − 2rank(C)

poiché rank'(C) > rank'(A):

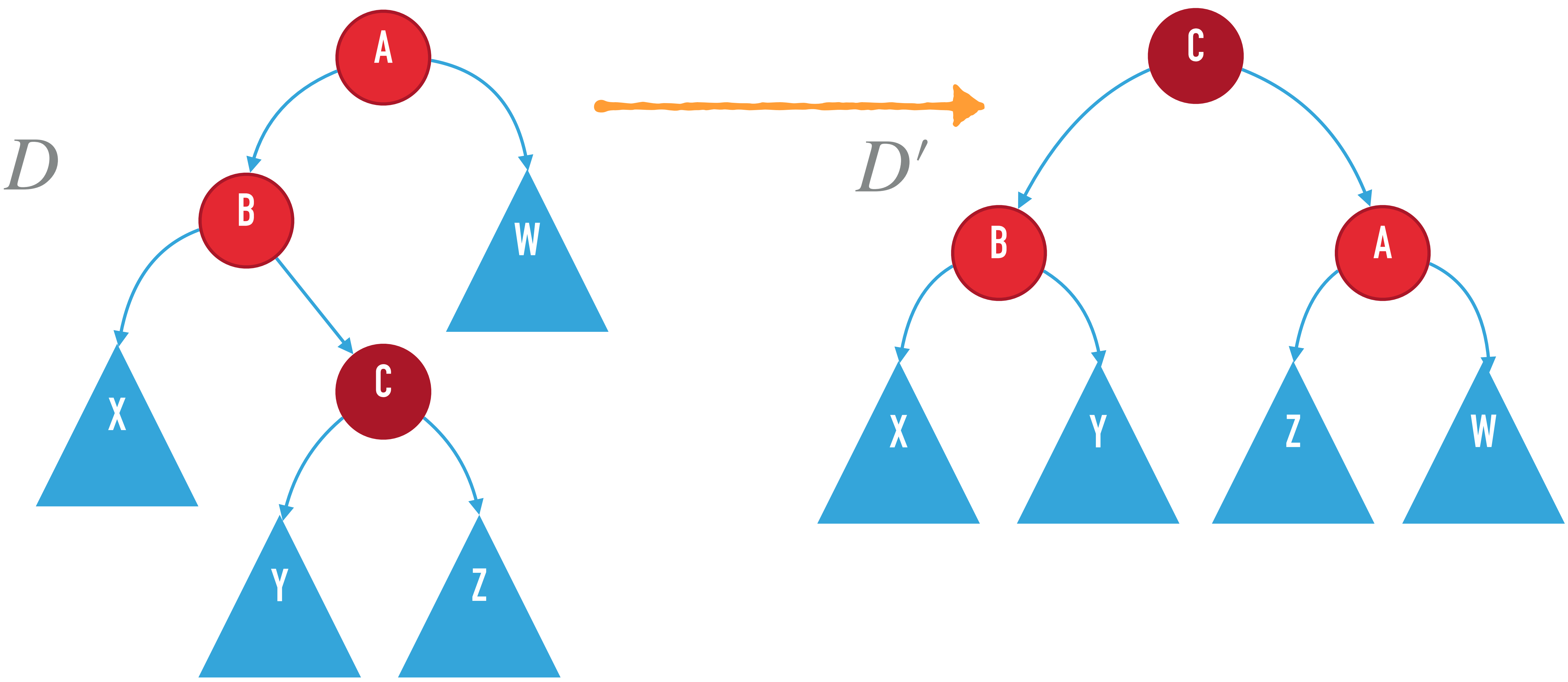
$\Phi(D') - \Phi(D) \leq 2($rank'$(C)$ − rank$(C))$

Perché ci servirà dopo facciamo questa maggiorazione

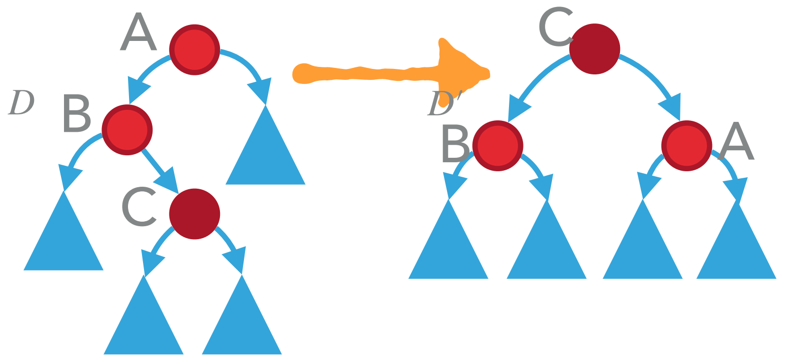
$\Phi(D') - \Phi(D) \leq 3($rank'$(C)$ − rank$(C)) - 1$

CASO ZIG ZAG

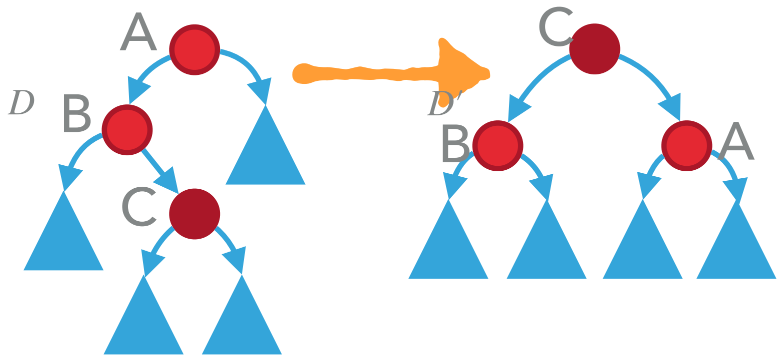
Il nodo da muovere è figlio destro di un nodo che è figlio sinistro



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

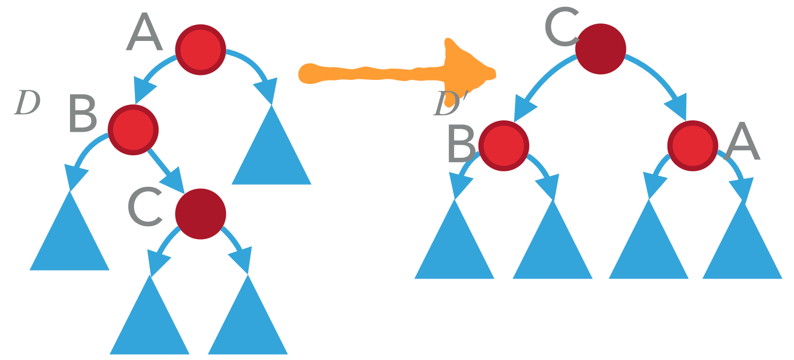


Per il caso zig zag l'analisi è uguale al caso precedente:

$$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) + \text{rank'}(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$$

Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Per il caso zig zag l'analisi è uguale al caso precedente:

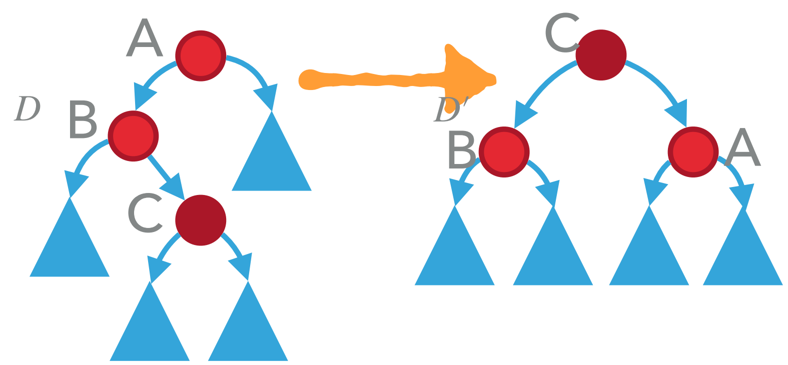
$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) + \text{rank'}(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

Ma $\text{rank}(A) = \text{rank'}(C)$, quindi

$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank'}(A) + \text{rank'}(B) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Per il caso zig zag l'analisi è uguale al caso precedente:

$$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank}'(A) + \text{rank}'(B) + \text{rank}'(C) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$$

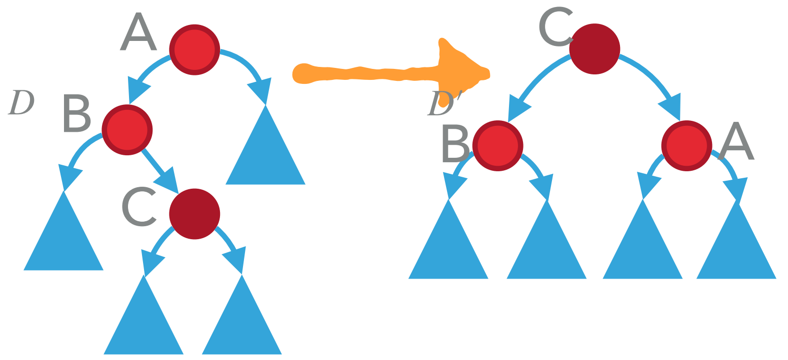
Perché questi sono gli unici nodi per cui cambia il valore

Ma $\text{rank}(A) = \text{rank}'(C)$, quindi
$\Phi(D') - \Phi(D) = \text{rank}'(A) + \text{rank}'(B) - \text{rank}(B) - \text{rank}(C)$

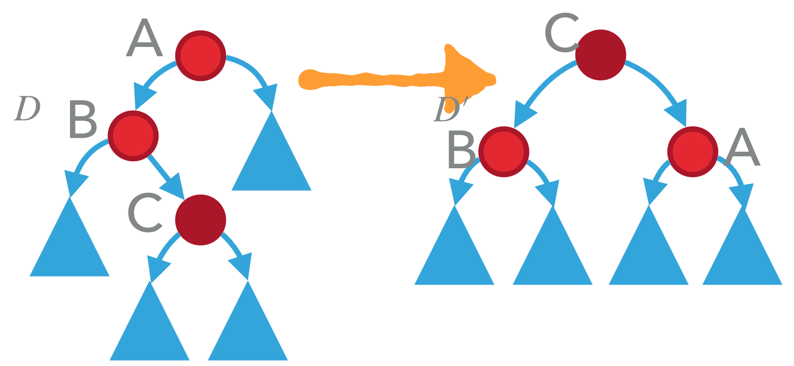
Ricordando che $\text{rank}(B) \geq \text{rank}(C)$:

$$\Phi(D') - \Phi(D) \leq \text{rank}'(A) + \text{rank}'(B) - \text{rank}(C) - \text{rank}(C)$$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



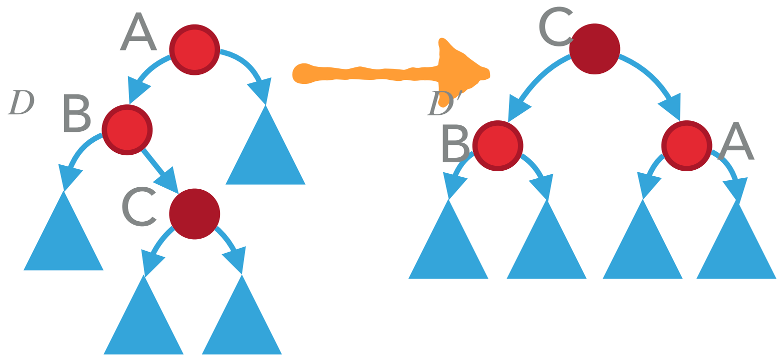
METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Ricordando anche che rank'$(B) \leq$ rank'(C):

$$\Phi(D') - \Phi(D) \leq \text{rank'}(A) + \text{rank'}(C) - 2\text{rank}(C)$$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



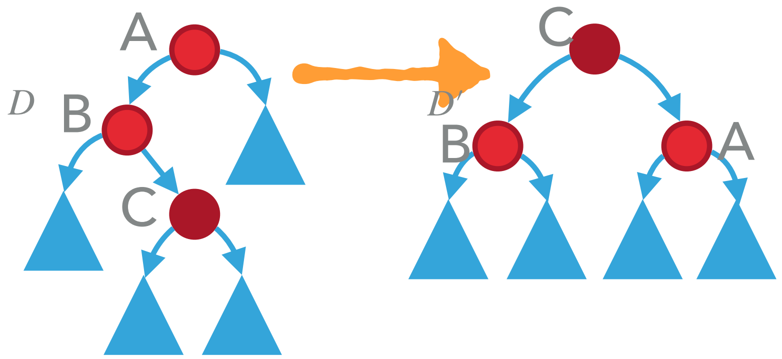
Ricordando anche che rank'(B) $\leq$ rank'(C):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ rank'(A) + rank'(C) − 2rank(C)

poiché rank'(C) > rank'(A):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ 2(rank'(C) − rank(C))

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY



Ricordando anche che rank'(B) $\leq$ rank'(C):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq$ rank'(A) + rank'(C) – 2rank(C)

poiché rank'(C) > rank'(A):

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq 2($rank'($C$) – rank($C$))

Perché ci servirà dopo facciamo questa maggiorazione

$\Phi(D') - \Phi(D) \leq 3($rank'($C$) – rank($C$)) – 1

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Se contiamo ogni passo splay come costo 1, abbiamo che il costo ammortizzato per spostare il nodo x è dato da

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Se contiamo ogni passo splay come costo 1, abbiamo che il costo ammortizzato per spostare il nodo x è dato da

$1 +$ rank'$(x) -$ rank(x) per le operazioni di zig

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Se contiamo ogni passo splay come costo 1, abbiamo che il costo ammortizzato per spostare il nodo x è dato da

$1 + \text{rank}'(x) - \text{rank}(x)$ per le operazioni di zig

$1 + 3(\text{rank}'(x) - \text{rank}(x)) - 1$ per zig zig e zig zag

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Se contiamo ogni passo splay come costo 1, abbiamo che il costo ammortizzato per spostare il nodo x è dato da

$1 + \text{rank'}(x) - \text{rank(x)}$ per le operazioni di zig

$1 + 3(\text{rank'}(x) - \text{rank}(x)) - 1$ per zig zig e zig zag

Se espandiamo una sequenza di operazioni vediamo che tutti i $\text{rank}(x)$ e $\text{rank'}(x)$ si cancellano tranne quello iniziale e l'ultimo, che è $\text{rank(root)} = \log_2 n$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Il costo ammortizzato $\hat{c}_i$ di una singola operazione è quindi

$\hat{c}_i \leq \text{rank}(\text{root}) - \text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Il costo ammortizzato $\hat{c}_i$ di una singola operazione è quindi

$\hat{c}_i \leq \text{rank(root)} - \text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$

Dove $\text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$ indica il rango del nodo cercato nell'istruzione i-esima nella struttura D_{i-1}.

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Il costo ammortizzato $\hat{c}_i$ di una singola operazione è quindi

$\hat{c}_i \leq \text{rank(root)} - \text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$

Dove $\text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$ indica il rango del nodo cercato nell'istruzione i-esima nella struttura D_{i-1}.

Quindi $\hat{c}_i \leq \text{rank(root)} = \log_2 n$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Il costo ammortizzato $\hat{c}_i$ di una singola operazione è quindi

$\hat{c}_i \leq \text{rank(root)} - \text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$

Dove $\text{rank}_{D_{i-1}}(x_i)$ indica il rango del nodo cercato nell'istruzione i-esima nella struttura D_{i-1}.

Quindi $\hat{c}_i \leq \text{rank(root)} = \log_2 n$

Per una sequenza di m operazioni il costo ammortizzato è quindi $O(m \log n)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Abbiamo completato l'analisi? No

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Abbiamo completato l'analisi? No

Ricordate: $\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$

Che nel nostro caso è $\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + O(m \log_2 n)$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Abbiamo completato l'analisi? No

Ricordate: $\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$

Che nel nostro caso è $\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + O(m \log_2 n)$

Quindi dobbiamo anche trovare quale sia la variazione di potenziale nell'albero

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Possiamo sommare elemento per elemento

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Possiamo sommare elemento per elemento

$$\sum_{x \in D_m} \mathrm{rank}_{D_m}(x) - \sum_{x \in D_0} \mathrm{rank}_{D_0}(x)$$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Possiamo sommare elemento per elemento

$$\sum_{x \in D_m} \text{rank}_{D_m}(x) - \sum_{x \in D_0} \text{rank}_{D_0}(x)$$

ma dato che l'albero contiene n nodi e la differenza massima di potenziale è $\log n$, sappiamo che possiamo maggiorare con $\sum_{x} \log n = n \log n$

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

METODO DEL POTENZIALE: ALBERI SPLAY

Otteniamo quindi che

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = \Phi(D_0) - \Phi(D_m) + \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = O(n \log n + m \log n)$$

Che è il risultato che volevamo per il **Balance Theorem**.