# Capitolo 9

# Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate

## 9.1 Associare a un'applicazione lineare una matrice

Nella Sezione 6.3 abbiamo visto come ad ogni matrice $A \in M(m \times n, K)$ si può associare in maniera naturale un'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$. Ora vogliamo associare una matrice a entrate in $K$ ad ogni applicazione lineare fra $K$-spazi vettoriali di dimensione finita. Per farlo dobbiamo preliminarmente fissare delle basi del dominio e del codominio, in modo da lavorare "in coordinate."

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra gli spazi vettoriali $V, W$ di dimensioni rispettivamente $n$ e $m$. Fissiamo basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $V$ e $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ di $W$. Consideriamo gli $n$ vettori corrispondenti in $f$ ai vettori di $\mathcal{B}$: $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$; ognuno si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, nella forma

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned} \tag{9.1}$$

cioè $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

**Definizione 9.1.1.** La **matrice di $f$ rispetto alle basi** $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è la seguente matrice $m \times n$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & \dots & f(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nelle colonne si trovano le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$.

Allora se $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n \in V$, per la linearità di $f$ si ha

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) = \\ &= x_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + x_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)w_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)w_m. \end{aligned}$$

Perciò, se chiamiamo $y_1, \dots, y_m$ le coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, ossia se $f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = y_1w_1 + \dots + y_mw_m$, abbiamo

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

In forma compatta possiamo scrivere $Y = AX$, dove $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è la matrice di $f$ rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Si può riassumere la situazione scrivendo un "diagramma commutativo"

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}'}} \\ K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^m \end{array} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{f} & f(v) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}'}} \\ (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{L(A)} & (y_1, \dots, y_m) \end{array} \tag{9.2}$$

Diagramma commutativo significa che $\kappa_{\mathcal{B}'} \circ f = L(A) \circ \kappa_{\mathcal{B}}$: posso passare da $V$ a $K^m$ applicando prima $f$ poi $\kappa_{\mathcal{B}'}$, oppure applicando prima $\kappa_{\mathcal{B}}$ poi $L(A)$, e il risultato è lo stesso.

Quando si introducono delle basi, si può lavorare con le coordinate anzichè con i vettori astratti, e ci si riduce a una situazione analoga a quella che si ha negli spazi vettoriali numerici $K^n$. **In coordinate** ogni applicazione lineare $f$ si rappresenta mediante una matrice $A$, come l'applicazione $L(A)$.

## 9.2 Esempi

1. La matrice associata all'applicazione lineare $L(A) : K^n \to K^m$ rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio è proprio $A$. Infatti $L(A)(e_i) = a^i$, la colonna $i$-esima di $A$. Se si cambiano basi, cambia la matrice.

2. Consideriamo la seguente matrice $2 \times 2$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, e l'applicazione lineare $L(A) : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$. Consideriamo poi le seguenti basi di $\mathbb{Q}^2$ (perchè sono basi?): $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}' = (w_1, w_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$. Vogliamo determinare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(L(A))$.

Dobbiamo calcolare $L(A)(v_1), L(A)(v_2)$ e poi esprimerli in funzione della base $\mathcal{B}'$.

$$L(A)(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; L(A)(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -w_1 + 2w_2; \; \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7w_1 + \frac{5}{2}w_2.$$

Perciò $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(L(A)) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Vedremo in seguito (Teorema 10.3.1) un altro modo per trovare questa matrice.

3. L'applicazione $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ tale che $D(f(t)) = f'(t)$, la derivata del polinomio $f$, è lineare (perchè?). Osserviamo che non ha senso parlare di matrice di $D$ perchè $\mathbb{R}[t]$ ha dimensione infinita. Per farlo, ci possiamo restringere a suoi sottospazi di dimensione finita. Consideriamo dunque gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali di dimensione finita $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ con base $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ con base $\mathcal{B}' = (1, t, t^2, t^3)$. Definiamo un'applicazione $T : V \to W$ ponendo $T(f(t)) = t^2 f'(t+1)$. Verificare per esercizio che anche $T$ è lineare. Calcoliamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$:

$$T(1) = 0, \; T(t) = t^2, \; T(t^2) = 2t^2 + 2t^3, \text{ perciò } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, le coordinate di $T(f)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix};$$

quindi $T(f(t)) = (a_1 + 2a_2)t^2 + 2a_2 t^3$. Questo può essere verificato anche direttamente, usando le proprietà della derivata.

## 9.3 Forma canonica

Il prossimo teorema ci dice che, purchè le basi del dominio e del codominio siano scelte in maniera opportuna, la matrice di un'applicazione lineare può assumere una forma particolarmente semplice, detta "forma canonica".

**Teorema 9.3.1.** *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra $K$-spazi vettoriali di dimensioni finite $m, n$, sia $r = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$ il rango di $f$. Esistono basi $\mathcal{B}$ di $V$ e $\mathcal{B}'$ di $W$ tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è una matrice a blocchi della forma*

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ m-r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & & n-r \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{9.3}$$

*dove $E_r$ è la matrice identica $r \times r$, e gli zeri denotano delle matrici nulle rispettivamente di tipo $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$, $(m-r) \times (n-r)$.*

*Dimostrazione.* Cerchiamo di capire quali proprietà devono avere le due basi perchè la matrice di $f$ rispetto a tali basi abbia la forma voluta.

Se la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ ha la forma (9.3) rispetto a basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ significa che

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= w_1 &&= 1w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m \\
&\vdots \\
f(v_r) &= w_r &&= 0w_1 + \dots + 1w_r + \dots + 0w_m \\
f(v_{r+1}) &= 0 \\
&\vdots \\
f(v_n) &= 0,
\end{aligned}$$

perciò $v_{r+1}, \dots, v_n \in \ker f$, e sono linearmente indipendenti perchè fanno parte della base $\mathcal{B}$ di $V$. Siccome $r = \operatorname{rg} f$ e $\dim V = n$, per il Teorema della dimensione 7.1.1 $\dim \ker f = n - r$, quindi $v_{r+1}, \dots, v_n$ **formano una base di** $\ker f$. D'altra parte **i vettori** $w_1, \dots, w_r$ **generano** $\operatorname{Im} f$, perchè sono le immagini non nulle dei vettori di una base del dominio (Proposizione 7.1.3) e quindi ne formano una base, perchè sono in numero di $r$. Ora abbiamo gli elementi necessari per costruire le basi volute.

Partiamo da una base di $\ker f$: $v_{r+1}, \dots, v_n$, e la completiamo a una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $V$. Allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im} f$. Siccome $f(v_{r+1}) = \dots = f(v_n) = 0$, non contribuiscono a generare $\operatorname{Im} f$, allora gli $r$ vettori $f(v_1), \dots, f(v_r)$ sono un sistema di $r$ generatori, e quindi una base di $\operatorname{Im} f$. Pongo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$, e poi li completo a una base $\mathcal{B}'$ di $W$ aggiungendo opportuni vettori $w_{r+1}, \dots, w_m$. Rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice di $f$ ha la forma (9.3). □

**Esempio 9.3.2.** *Consideriamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Trovare basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(L(A))$ sia in forma canonica.*

*Calcoliamo facilmente con il metodo di eliminazione di Gauss che* $\operatorname{rg}(A) = 3$ *e che una base di* $\ker L(A)$ *è costituita dall'unico vettore $v = (-3, 2, 1, 0)$. Usando il teorema dello scambio, costruiamo una base di $\mathbb{R}^4$ contenente $v$, per esempio $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_4, v)$. Allora $L(A)(e_1) = w_1 = (1, 1, -1)$, $L(A)(e_2) = w_2 = (2, 1, -2)$, $L(A)(e_4) = w_3 = (1, 2, 0)$, e $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ è la base di $\mathbb{R}^3$ voluta. La matrice in forma canonica è* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## 9.4 Rango di matrici e applicazioni lineari

**Teorema 9.4.1.** *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita, siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di $V$ e di $W$ rispettivamente. Sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$. Allora* $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} L(A)$.

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente diagramma commutativo dove $\kappa_{\mathcal{B}}$ e $\kappa_{\mathcal{B}'}$ sono gli isomorfismi introdotti nella Sezione 8.2:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \end{tikzcd}.$$

Osserviamo che $\operatorname{Im} L(A) = \kappa_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Im} f)$; infatti se $y \in \operatorname{Im} L(A)$ esiste $x \in K^n$ tale che $y = L(A)(x)$. Essendo $\kappa_{\mathcal{B}}$ un isomorfismo, $x = \kappa_{\mathcal{B}}(v)$ per un (unico) $v \in V$. Quindi $y = L(A)(\kappa_{\mathcal{B}}(v)) = \kappa_{\mathcal{B}'}(f(v))$ per la commutatività del diagramma, e quindi $\operatorname{Im} L(A) \subset \kappa_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Im} f)$. Viceversa se $y \in \kappa_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Im} f)$, esiste $v \in V$ tale che $y = \kappa_{\mathcal{B}'}(f(v)) = L(A)(\kappa_{\mathcal{B}}(v))$, il che prova l'inclusione opposta. Poichè $\kappa_{\mathcal{B}'}$ è un isomorfismo, $\operatorname{Im} f \simeq \kappa_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} L(A)$ e perciò $\dim \operatorname{Im} L(A) = \dim \operatorname{Im} f$ ossia $\operatorname{rg} L(A) = \operatorname{rg} f$; infine ricordiamo che $\operatorname{rg} L(A) = \operatorname{rg} A$ (Sezione 7.2.3). $\square$

Otteniamo la seguente conseguenza:

**Corollario 9.4.2.** *Matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse hanno lo stesso rango.*

## 9.5 Isomorfismo fra applicazioni lineari e matrici

Fissiamo ora due $K$-spazi vettoriali $V, W$ di dimensioni finite $n, m$ e due loro basi $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_m)$. Associando a ogni applicazione lineare di $V$ in $W$ la sua matrice rispetto a tali basi possiamo costruire un'applicazione.

**Teorema 9.5.1.** *L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}: & \operatorname{Hom}(V, W) & \to & M(m \times n, K) \\ & f & \to & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

*è un isomorfismo di $K$-spazi vettoriali.*

La dimostrazione si basa sul teorema di determinazione di un'applicazione lineare.

*Dimostrazione.*

1. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è lineare: date applicazioni lineari $f, g : V \to W$ e scalari $\lambda, \mu$ si tratta di verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) + \mu M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(g)$. Per la Definizione 9.1.1 di matrice di un'applicazione lineare, basta verificare che $(\lambda f + \mu g)(v_i) = \lambda f(v_i) + \mu g(v_i)$ per ogni indice $i = 1, \ldots, n$; ma questo segue dalla definizione delle operazioni in $\operatorname{Hom}(V, W)$.

2. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è iniettiva: siccome abbiamo appena verificato che l'applicazione è lineare, basta verificare che $\ker M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è nullo. Sia dunque $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = 0$, la matrice nulla. Allora le sue colonne sono tutte uguali al vettore nullo di $K^m$, e quindi $f(v_1) = \cdots = f(v_n) = 0_W$. Ma anche l'applicazione nulla fa corrispondere a ogni vettore di $\mathcal{B}$ il vettore $0_W$; per la parte di unicità del teorema 8.1.1, segue che $f = 0$.

3. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è suriettiva: prendiamo una qualunque matrice $A \in M(m \times n, K)$; vogliamo costruire un'applicazione lineare $f$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = A$. Consideriamo le $n$ colonne di $A$: $a^1, \ldots, a^n$, e gli $n$ vettori di $W$ che hanno come coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ tali colonne: $u_1 := \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1}(a^1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m, \ldots, u_n := \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1}(a^n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$. Definiamo allora $f$ come l'unica applicazione lineare di $V$ in $W$ tale che $f(v_1) = u_1, \ldots, f(v_n) = u_n$. Si ha allora $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$.

$\square$

**Corollario 9.5.2.** $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim M(m \times n, K) = mn = \dim V \dim W$.

Si ritrova in particolare che $\dim V^* = \dim \mathrm{Hom}(V, K) = \dim V$ (Sezione 8.3, 2.)

## 9.6 Matrice di una composta di applicazioni lineari

Consideriamo la seguente situazione:

$$\begin{array}{ccccccl} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U & & \text{applicazioni lineari} \\ m & & n & & p & & \text{dimensioni finite} \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}' & & \mathcal{B}'' & & \text{basi} \end{array}$$

Allora la matrice dell'applicazione lineare composta è il prodotto righe per colonne delle matrici di $f$ e di $g$ nell'ordine appropriato:

$$\underset{p \times m}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(g \circ f)} = \underset{p \times n}{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g)} \quad \underset{n \times m}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)} \quad \text{prodotto righe per colonne}$$

Facciamo la verifica. Siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_m)$, $\mathcal{B}'' = (v''_1, \ldots, v''_p)$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g)$.

Per ogni $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ si ha:

$$f(v_k) = a_{1k}v'_1 + \cdots + a_{mk}v'_m = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}v'_j,$$

$$g(v'_j) = b_{1j}v''_1 + \cdots + b_{pj}v''_p = \sum_{i=1}^{p} b_{ij}v''_i.$$

Allora

$$g(f(v_k)) = g(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}v'_j) \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{jk}g(v'_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{p} b_{ij}v''_i \overset{\text{prop.distrib.}}{=} \sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{jk})v''_i :$$

il coefficiente di $v''_i$ è proprio l'elemento di $BA$ di posto $ik$.

**Il caso degli endomorfismi**

Se $f : V \to V$ è un endomorfismo di $V$, $\dim V = n$, si può prendere la stessa base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio; in tal caso si scrive $M_{\mathcal{B}}(f)$ anzichè $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

L'isomorfismo $M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V,V) \to M(n \times n, K)$ gode allora della ulteriore proprietà $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f)$, cioè conserva, oltre alla somma e al prodotto esterno, anche l'ulteriore operazione di "prodotto" interno, più precisamente manda la composizione di applicazioni in $\mathrm{Hom}(V,V)$ nel prodotto righe per colonne delle loro matrici in $M(n \times n, K)$. In questo caso si dice che $M_{\mathcal{B}}$ è un **isomorfismo di $K$-algebre**.

## 9.7 Applicazioni lineari di $K^n$ in $K^m$

Come ulteriore applicazione della teoria sviluppata, concludiamo questo capitolo dando la caratterizzazione delle applicazioni lineari $K^n \to K^m$: sono tutte e sole del tipo $L(A)$.

Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ le basi canoniche di $K^n$ e di $K^m$ rispettivamente. Abbiamo allora l'isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} : & \mathrm{Hom}(K^n, K^m) & \to & M(m \times n, K) \\ & f & \to & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f) \\ & L(A) & \to & A \qquad\qquad \text{Sezione 9.2, 1.} \end{array}$$

L'isomorfismo inverso è allora $L : M(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ che manda $A \to L(A)$. Ciò significa che **ogni applicazione lineare $K^n \to K^m$ può essere espressa nella forma $L(A)$ per un'unica matrice $A$.**

Nel caso particolare $m = n$, supponiamo che $f : K^n \to K^n$ corrisponda nell'isomorfismo $M_{\mathcal{C}}$ a una matrice $A = M_{\mathcal{C}}(f)$ e $g : K^n \to K^n$ a una matrice $B = M_{\mathcal{C}}(g)$, dunque $f = L(A)$, $g = L(B)$. Allora $g \circ f$ corrisponde a $M_{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}(g)M_{\mathcal{C}}(f) = BA$. Quindi si ha $L(BA) = L(B) \circ L(A)$.

# Capitolo 10

# Matrici invertibili e cambiamento di base

## 10.1 Matrici invertibili

**Definizione 10.1.1.** Sia $A$ una matrice quadrata $n \times n$ a entrate in $K$. $A$ è detta **invertibile** se esiste $A' \in M(n \times n, K)$ tale che $AA' = A'A = E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. In tal caso $A'$ è l'inversa di $A$ e la si denota $A^{-1}$.

Denoteremo $\mathrm{GL}(n, K) \subset M(n \times n, K)$ il sottinsieme delle matrici invertibili.

**Proposizione 10.1.2.** *$GL(n, K)$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne, detto gruppo lineare generale.*

*Dimostrazione.*

1. $\mathrm{GL}(n, K)$ è chiuso rispetto al prodotto: se $A, B$ sono matrici invertibili $n \times n$, anche $AB$ è invertibile, e si ha $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$.

2. $E_n$, che è l'elemento neutro rispetto al prodotto, è invertibile, e coincide con la sua inversa.

3. Se $A$ è invertibile, anche la sua inversa $A^{-1}$ è invertibile, e precisamente $(A^{-1})^{-1} = A$.

□

**Osservazione 13.** $\mathrm{GL}(n, K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M(n \times n, K)$. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quest'ultima è somma di matrici invertibili, infatti la prima è la matrice identica, e anche la seconda coincide con la propria inversa. Ma la somma non è invertibile. Infatti moltiplicata per qualunque altra matrice non può dare la matrice identica: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$.

**Osservazione 14.** La trasposta di una matrice invertibile è invertibile e si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

**Teorema 10.1.3.** *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali della stessa dimensione finita $n$; siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di $V$ e $W$. Allora $f$ è un isomorfismo se e solo se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è una matrice invertibile.*

*Dimostrazione.* Se $f$ è un isomorfismo esiste l'isomorfismo inverso $f'$ tale che $f \circ f' = \mathrm{id}_W$ e $f' \circ f = \mathrm{id}_V$. Poniamo $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f')$. Allora

$$AA' = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f') \overset{9.6}{=} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f \circ f') = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_W) = E_n,$$

$$A'A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f') M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \overset{9.6}{=} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f' \circ f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = E_n.$$

Dunque $A' = A^{-1}$.

Viceversa, se $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ è invertibile, allora $L(A)$ risulta un isomorfismo: infatti $AA^{-1} = E_n$, quindi $L(AA^{-1}) \overset{9.7}{=} L(A) \circ L(A^{-1}) = L(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}$; analogamente $L(A^{-1}) \circ L(A) = \mathrm{id}_{K^n}$, quindi $L(A^{-1})$ è l'applicazione inversa di $L(A)$. Consideriamo infine il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \end{tikzcd} :$$

poichè $f = \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ L(A) \circ \kappa_{\mathcal{B}}$, ricordando che composizione di isomorfismi è isomorfismo, concludiamo che anche $f$ è un isomorfismo. □

**Corollario 10.1.4.** *Sia $A$ una matrice quadrata $n \times n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$A$ è invertibile;*
2. *$\mathrm{rg}(A)$ è massimo pari a $n$;*
3. *le $n$ colonne di $A$ sono linearmente indipendenti;*
4. *le $n$ righe di $A$ sono linearmente indipendenti;*
5. *le $n$ colonne di $A$ generano lo spazio delle colonne;*
6. *le $n$ righe di $A$ generano lo spazio delle righe.*

*Dimostrazione.* Dal Teorema 10.1.3 segue: $A$ è invertibile se e solo se $L(A)$ è un isomorfismo, se e solo se $L(A)$ è suriettiva (perchè endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita), se e solo se le $n$ colonne di $A$ generano il codominio $K^n$, se e solo se il rango di $A$ è massimo $n$. Ricordando che rango per righe e per colonne coincidono (Teorema 7.2.3) e la Proposizione 7.2.1, otteniamo l'equivalenza con le altre condizioni. □

## 10.2 Cambiamento di base

Sia $V$ un $K$-spazio vettoriale di dimensione $n$. Supponiamo che $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ siano due basi di $V$. Ci chiediamo come si passa dalle coordinate rispetto ad $\mathcal{A}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e viceversa. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V \\ \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} \\ K^n & \longrightarrow & K^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & v \\ \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & (y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

dove per ogni vettore $v \in V$ si ha $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$.

Siccome $\mathrm{Hom}(K^n, K^n) \simeq M(n \times n, K)$, l'applicazione lineare "in basso" $K^n \to K^n$, che manda le coordinate di $v$ rispetto ad $\mathcal{A}$ $(x_1, \dots, x_n)$ in quelle rispetto a $\mathcal{B}$ $(y_1, \dots, y_n)$, è del tipo $L(M)$, dove $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

**Definizione 10.2.1.** Tale matrice $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ è detta **matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ o matrice del cambiamento di base.**

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{id}_V(v_1) & \mathrm{id}_V(v_2) & \dots & \mathrm{id}_V(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

La prima colonna contiene le coordinate di $v_1$ rispetto a $\mathcal{B}$, la seconda le coordinate di $v_2$ rispetto a $\mathcal{B}$, ecc., cioè nelle colonne di $M$ sono contenute le coordinate dei vettori di $\mathcal{A}$ rispetto a $\mathcal{B}$: $v_1 = m_{11} w_1 + \dots + m_{n1} w_n, \dots, v_n = m_{1n} w_1 + \dots + m_{nn} w_n$.

**Osservazione 15.** Siccome la matrice del cambiamento di base è la matrice che rappresenta $\mathrm{id}_V$, che è ovviamente un isomorfismo, rispetto a una scelta di basi, il rango di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ è uguale a $n$, cioè la matrice è invertibile (per il Teorema 10.1.3). La sua inversa è proprio $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$. Infatti guardiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V \\ \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}}} \\ K^n & \xrightarrow{L(M)} & K^n & \xrightarrow{L(M')} & K^n \end{array}$$

in cui $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$, $M' = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$. Si ha chiaramente che la composta delle due applicazioni in basso è l'applicazione identica di $K^n$, dunque $\mathrm{id}_{K^n} = L(M') \circ L(M) = L(M'M)$ per 9.7. Concludiamo che $M'M = E_n$. Analogamente si prova che anche $MM' = E_n$. Dunque $M' = M^{-1}$.

Osserviamo che le colonne di $M'$, ossia di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)^{-1}$, contengono le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ dei vettori della "nuova" base $\mathcal{B}'$.

Osserviamo anche che, data una base $\mathcal{B}$ di $V$, ogni matrice invertibile $M$ può essere interpretata come matrice di un cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a una nuova base. I vettori della nuova base sono quelli le cui coordinate, rispetto a $\mathcal{B}$, sono contenute nelle colonne di $M^{-1}$.

## 10.3 Matrici di un'applicazione lineare rispetto a basi diverse

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che siano date due basi di $V$: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ e due basi di $W$: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. In questa sezione vogliamo trovare la relazione che c'è fra $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$ e $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(f)$. Otterremo:

**Teorema 10.3.1.**

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_V).$$

*Dimostrazione.* La relazione si ottiene facilmente considerando i diagrammi commutativi del tipo (9.2) per le applicazioni $f, \mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W$, relativi alle basi considerate:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}'}"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] \\
K^n \arrow[r, "L(T)"] & K^n \arrow[r, "L(M)"] & K^m \arrow[r, "L(S)"] & K^m
\end{tikzcd} \tag{10.1}$$

dove $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$, $S = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W)$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ basi di $W$, $T = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_V)$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{A}'$ ad $\mathcal{A}$ basi di $V$. Allora, interpretando $f$ come la composizione della tre applicazioni della prima riga, vediamo che la matrice di $f$ rispetto ad $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ è quella che corrisponde alla composizione $L(S) \circ L(M) \circ L(T)$, ed è quindi $SMT$ (Sezione 9.7). □

In particolare, dal momento che $S$ e $T$ sono matrici di cambiamenti di base, abbiamo ottenuto che **due matrici che rappresentano l'applicazione lineare $f$ rispetto a basi diverse differiscono per il prodotto a destra e a sinistra per matrici invertibili.**

Come conseguenza del Teorema 9.3.1 - Forma canonica - otteniamo allora:

**Teorema 10.3.2.** *Data una matrice $M \in M(m \times n, K)$, esistono matrici invertibili $S$ $m \times m$, e $T$ $n \times n$ tali che*

$$SMT = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} r & & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} & \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10.2}$$

*dove $r = \mathrm{rg}(M)$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $L(M) : K^n \to K^m$: $M$ è la sua matrice rispetto alle basi canoniche. Ma esistono basi di $K^n$ e $K^m$, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rispetto alle quali la matrice di $L(M)$ è

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r & \quad & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} & \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10.3}$$

Siano $T = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{K^n})$, $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_{K^m})$. Per il Teorema 10.3.1, $SMT$ coincide con la matrice (10.3). $\square$

**Esempio 10.3.3.** Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \to W$ con $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, definita da $f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$. Se $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $\mathcal{B}'(1, t, t^2, t^3)$, allora

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo $\mathcal{A} = (1, t-1, (t-1)^2)$ in $V$ e $\mathcal{A}' = (1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3)$ in $W$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

ha rango 3 e questo conferma che $\mathcal{A}$ è una base di $V$.

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

anche questa matrice ha rango massimo 4, dunque è invertibile, il che conferma che anche $\mathcal{A}'$ è una base. Applicando il Teorema 10.3.1, otteniamo che

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)^{-1} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V).$$

Nella Sezione 10.5 vedremo come calcolare $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)^{-1}$.

## 10.4 Il caso di un endomorfismo

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Fissiamo la stessa base $\mathcal{A}$ di $V$ in dominio e codominio e consideriamo la matrice $M_{\mathcal{A}}(f)$; poi prendiamo un'altra base $\mathcal{B}$ di $V$ e consideriamo $M_{\mathcal{B}}(f)$. Dal Teorema 10.3.1 otteniamo

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) M_{\mathcal{A}}(f) M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V),$$

ma ora le due matrici "ai lati" $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ sono matrici una inversa dell'altra, perchè rappresentano cambiamenti di base opposti.

Posta $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$, la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, abbiamo perciò $M_{\mathcal{B}}(f) = SM_{\mathcal{A}}(f)S^{-1}$.

**Notiamo che, se abbiamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto ad $\mathcal{A}$, possiamo scrivere direttamente la matrice $S^{-1} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.**

**Definizione 10.4.1** (Relazione di similitudine di matrici)**.** Due matrici quadrate $A, B$, $n \times n$ a coefficienti in $K$, si dicono **simili** se esiste $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ tale che $A = SBS^{-1}$.

La similitudine è una relazione d'equivalenza in $M(n \times n, K)$. Infatti

- $A = E_n A E_n^{-1}$;
- se $A = SBS^{-1}$, allora, moltiplicando a sinistra per $S^{-1}$ e a destra per $S$ otteniamo $B = S^{-1}AS$.
- se $A = SBS^{-1}$ e $B = MCM^{-1}$, allora $A = S(MCM^{-1})S^{-1} = (SM)C(SM)^{-1}$.

Dal momento che ogni matrice invertibile si può interpretare come la matrice di un cambiamento di base, si ha che due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. In particolare **matrici simili hanno lo stesso rango**.

Un problema molto importante e non banale è quello di trovare un rappresentante "semplice" o "canonico" per la classe di similitudine di una matrice data, ossia una sua "forma canonica". In altre parole, si vuole descrivere l'insieme quoziente. Tratteremo il problema della diagonalizzabilità di una matrice quadrata data $M$, ossia di saper dire se $M$ è simile a una matrice diagonale. Vedremo che non sempre la risposta è affermativa. In alcuni casi in cui la risposta è negativa, vedremo che è possibile considerare un'altra forma canonica, detta di Jordan.

## 10.5 Algoritmo per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile

Iniziamo provando un risultato preliminare.

**Proposizione 10.5.1.** *Sia $A$ una matrice $n \times n$ tale che esiste una matrice $n \times n$ $B$ per cui $BA = E_n$, oppure esiste una matrice $C$ per cui $AC = E_n$. Allora $A$ è invertibile. Inoltre nel primo caso $A^{-1} = B$ e nel secondo caso $A^{-1} = C$.*

*Dimostrazione.* Se $BA = E_n$, si ha $\mathrm{id}_{K^n} = L(BA) = L(B) \circ L(A)$ (Sezione 9.7). Ma allora $L(A)$ è iniettiva: infatti se $L(A)(x) = 0$, si ha anche $L(B)(L(A)(x)) = L(B)(0) = 0$, e dunque $x \in \ker(L(B) \circ L(A)) = \ker(\mathrm{id}_{K^n}) = (0)$. Essendo $L(A)$ un endomorfismo iniettivo di $K^n$ che ha dimensione finita, $L(A)$ è un isomorfismo, e perciò $A$ è invertibile. Ora da $AC = E_n$ segue che $A^{-1}(AC) = A^{-1}$ e dunque $C = A^{-1}$.

Se invece $AC = E_n$, $L(AC) = L(A) \circ L(C) = \mathrm{id}_{K^n}$. Allora $L(A)$ è suriettiva: se $y \in K^n$, si ha $y = L(A)(L(C)(y))$ e dunque $y \in \operatorname{Im} L(A)$. Come nel caso precedente allora segue che $L(A)$ è un isomorfismo e $A$ è invertibile. Inoltre da $BA = E_n$ segue $(BA)A^{-1} = E_n A^{-1}$ ossia $B = A^{-1}$. □

Questo risultato permette di cercare l'inversa di una matrice $A$ imponendo a una matrice incognita $X$ soltanto una delle due condizioni $AX = E_n$ o $XA = E_n$.

Sia dunque $A$ una matrice $n \times n$ invertibile. Vogliamo trovare la sua inversa. Chiamiamo $X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ di incognite: vogliamo risolvere l'equazione matriciale $AX = E_n$.

Risolvere questa equazione matriciale è equivalente a risolvere gli $n$ sistemi lineari:

$$\begin{aligned} AX^1 &= e_1 \\ AX^2 &= e_2 \\ &\vdots \\ AX^n &= e_n \end{aligned} \tag{10.4}$$

dove $X^1, X^2, \dots, X^n$ sono le colonne di $X$. Dobbiamo dunque risolvere $n$ sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti $A$, le cui colonne dei termini noti sono $e_1, \dots, e_n$. Poichè $A$ è invertibile ognuno di tali sistemi ha una e una sola soluzione. Per risolverli possiamo usare l'algoritmo di Gauss, riducendo a gradini le matrici complete degli $n$ sistemi, che sono $(A \mid e_i)$. Le trasformazioni elementari da eseguire sono le stesse per tutti i sistemi, quindi possiamo eseguirle per tutti i sistemi contemporaneamente; partiamo dunque dalla matrice ottenuta aggiungendo ad $A$ tutti gli $n$ vettori della base canonica di $K^n$, ossia la matrice identica $E_n$ e operiamo con trasformazioni elementari in modo da arrivare a una matrice $(B \mid C)$ dove $B$ è una matrice $n \times n$ a gradini con $n$ pivot:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & | & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (A \mid E_n) \ \rightarrow (B \mid C). \tag{10.5}$$

La matrice $(B \mid C)$ ci dà $n$ sistemi lineari a gradini equivalenti ai primi $n$. Ora continuiamo operando di nuovo con trasformazioni elementari sulle righe ma a partire dal basso, per mandare a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale di $B$.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & | & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & | & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & | & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} & | & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

Essendo $b_{nn} \neq 0$ possiamo usare l'ultima riga $(b_n \mid c_n)$ per mandare a zero gli elementi dell'ultima colonna di $B$ sopra a $b_{nn}$, cioè alla riga $i$-esima $(b_i \mid c_i)$ sostituiamo $(b_i - \frac{b_{in}}{b_{nn}} b_n \mid c_i - \frac{b_{in}}{b_{nn}} c_n)$:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1,n-1} & 0 & | & c'_{11} & \dots & c'_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b'_{2,n-1} & 0 & | & c'_{21} & \dots & c'_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & | & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & 0 & | & c'_{n-1,n} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} & | & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

L'ultima riga di $(B \mid C)$ e la diagonale di $B$ sono rimasti invariati; ora usiamo la penultima riga per mandare a zero gli elementi sopra a $b_{n-1,n-1}$, e così via finchè arriviamo a una matrice del tipo:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 & \mid & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 & \mid & d_{12} & \dots & d_{2n} \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mid & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} & \mid & d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}:$$

una matrice diagonale con tutti gli elementi della diagonale non nulli, seguita da una matrice $D$. Ora con trasformazioni elementari del I tipo trasformiamo la matrice diagonale in $E_n$, e otteniamo una matrice $(E_n \mid A')$: $A'$ risulta essere proprio $A^{-1}$, l'inversa di $A$. Infatti i sistemi lineari (10.4) sono stati trasformati nei sistemi equivalenti:

$$\begin{array}{rl} X^1 = & a'^1 \\ X^2 = & a'^2 \\ \vdots & \\ X^n = & a'^n \end{array} . \tag{10.6}$$

Abbiamo dunque descritto un algoritmo per la costruzione dell'inversa di una matrice invertibile. Osserviamo che, se a priori non sappiamo se una matrice $A$ è invertibile o meno, possiamo comunque eseguire i primi passi dell'algoritmo fino alla determinazione dei pivot di $A$, e così rispondere a questa prima domanda.

**Esempio 10.5.2.** Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Eseguiamo l'algoritmo.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Siamo arrivati a determinare i pivot di $A$ e abbiamo così verificato che $A$ ha rango 3 ed è perciò invertibile; ora proseguiamo con l'algoritmo per arrivare ad avere una matrice diagonale nella prima metà.

$$\overset{III}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \mid & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

È sempre consigliabile a questo punto fare la verifica che

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 10.5.3** (Esempio 10.3.3 - continua)**.** Calcoliamo l'inversa di

$$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ che è già triangolare superiore.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Abbiamo trovata l'inversa di $M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_W)$. La matrice cercata è

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}(f) = M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_W)^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & 32 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$