Teorema Supponiamo che $\dim V = \dim W = n < \infty$. Sia $f : V \to W$ lineare. Allora le seguenti sono equivalenti:

i) f è iniettiva;

ii) f è suriettiva;

iii) f è un isomorfismo.

Dim Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base per V.

i) $\Rightarrow$ iii) f iniettiva $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ lin. indip.

$\Rightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ base per W perché $\dim W = n$. Quindi f è un isomorfismo per il teorema della lezione precedente.

iii) $\Rightarrow$ ii) ovvio

ii) $\Rightarrow$ i) f suriettiva $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ generatori per $W \Rightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ base per W perché $\dim W = n$. Quindi f è iniettiva (è un isomorfismo).

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le seguenti sono equivalenti:

i) $\exists\, B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = I_n$ oppure $BA = I_n$

ii) $\operatorname{rg} A = n$

iii) A è invertibile, cioè $\exists\, B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = I_n$.

Dim Segue subito dal teorema con $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

OSS 1) Supponiamo $\dim V < \infty$ e $\dim W < \infty$. Allora $\exists\, f: V \to W$ lineare e iniettiva $\iff \dim V \leq \dim W$

2) $\exists\, f: V \to W$ lineare e suriettiva $\iff \dim V \geq \dim W$.

Teorema Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora esiste una base $\mathcal{V}$ per V e una base $\mathcal{W}$ per W t.c.

$$M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{dove } r = \operatorname{rg} f.$$

Dim Si ha $\dim(\ker f) = n - r$ e sia $(u_1, \dots, u_{n-r})$ una base per $\ker f$. Possiamo trovare vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ t.c. $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{n-r})$ sia base per V.

Allora $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r) \in W$ sono generatori per $\operatorname{im} f$. Dato che $\dim(\operatorname{im} f) = \operatorname{rg} f = r$, $(w_1, \dots, w_r)$ è base per $\operatorname{im} f$. Possiamo trovare vettori $w_{r+1}, \dots, w_m \in W$ t.c. $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ sia base per W. Allora

$$M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Calcolo della matrice inversa

Def Una <u>matrice elementare</u> di ordine m a entrate in un campo $\mathbb{K}$ è una matrice ottenuta da I_m mediante una singola operazione elementare sulle righe.

Es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ...

OSS $E \in M_m(\mathbb{K})$ elementare $\Rightarrow$ E invertibile

Infatti le operazioni elementari preservano il rango e $\operatorname{rg} I_m = m$.

Lemma Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e supponiamo che $A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sia ottenuta da A mediante una sola operazione elementare sulle righe. Allora esiste una matrice elementare E di ordine m t.c.

$$A' = EA.$$

Dim Sia E la matrice elementare ottenuta applicando a I_m la stessa operazione elementare che svolgiamo su A. Si verifica direttamente che $A' = EA$.

Per esempio, scambiamo le righe i e j, con $i < j$:

E ottenuta da I_m scambiando le righe i e j

$$(EA)^{(i)} = E^{(i)} A = (I_m)^{(j)} A = A^{(j)} \qquad (0 \dots 0 \; 1 \; 0 \dots 0) A$$

j-esimo

$$(EA)^{(j)} = E^{(j)} A = (I_m)^{(i)} A = A^{(i)}$$

$$(EA)^{(h)} = E^{(h)} A = (I_m)^{(h)} A = A^{(h)} \quad , \; h \neq i, j.$$

In modo simile si trattano le altre due operazioni elementari.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

cioè A' ottenuta da A sommando $(-2) A^{(2)}$ ad $A^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow EA = A'.$$

Sia ora $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile, cioè $rg\, A = n$. Applicando Gauss possiamo ridurre A a gradini e diventa quindi triangolare superiore (con soli 0 sotto la diagonale principale). Dato che $rg\, A = n$, si avranno n pivot $\Rightarrow$ le entrate sulla diagonale principale sono $\neq 0$.

Applicando Gauss a ritroso, dall'ultima riga, possiamo trasformare la matrice in I_n.

Alla fine questo equivale a moltiplicare per A^{-1}!

In pratica per tenere traccia delle operazioni elementari è conveniente lavorare sulla matrice $(A \mid I_n)$: si fanno tutte le operazioni sulle righe per trasformare A in I_n. Allora I_n si trasforma in A^{-1}.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Def L'insieme delle matrici invertibili $n \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$ si denota con $GL_n(\mathbb{K})$ o anche $GL(n, \mathbb{K})$. Cioè si pone

$$GL_n(\mathbb{K}) \overset{def}{=} \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile}\}$$

e lo si chiama <u>gruppo lineare generale</u>.

Si ha: $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$; $A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{K})$ con $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$. Pertanto $GL_n(\mathbb{K})$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. $GL_n(\mathbb{K})$ <u>non è abeliano</u> per $n \geqslant 2$ mentre $GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} - \{0\}$.

Teorema Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Allora

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$$

e quindi $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Dim Sia $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ una base per W.

$$M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)$$

Si vede subito che $M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ è lineare. Mostriamo che è iniettiva: $f \in \ker M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} \Rightarrow M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) = 0$ $\Rightarrow f(v_j) = 0_W \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow f = 0$ per il teorema di determinazione. Quindi $\ker M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = 0$ $\Rightarrow M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ iniettiva.

Sia ora $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$.

Poniamo $u_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad , j = 1, \dots, n$.

Per il teorema di determinazione $\exists !\ f_A : V \to W$ lineare t.c. $f_A(v_j) = u_j \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow$ $M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f_A) = A$ e quindi $M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ è suriettiva.

Pertanto $M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ è un <u>isomorfismo</u> (che dipende dalle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$). Quindi

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m\,n.$$

Teorema Sia $S: AX = B$ un sistema lineare con $A \in GL_n(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^n$. Allora A è compatibile, e ammette l'unica soluzione

$$X = A^{-1} B.$$

La dimostrazione è immediata.