LOGICA

Lezione 2: Logica Proposizionale

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della Lezione

- Sintassi della logica proposizionale
- Induzione strutturale
- Semantica della logica proposizionale
  - Connettivi logici
  - Interpretazione

- La logica intende trattare le sentenze in base alla loro struttura e non al loro contenuto

- La denotazione associata ad una sentenza dal punto di vista della logica classica è un valore Booleano (1/0), si dice **valore di verità**

- Il senso è un concetto della denotazione

- Ogni concetto (a cui associamo una denotazione) è un enunciato

Proposizioni

- Gli enunciati (dichiarativi) che formano la logica proposizionale sono detti proposizioni.

- Uno proposizione può essere:
  - atomica
  - composta: cioè costruita a partire da proposizioni atomiche usando i connettivi: non, e, o, se…allora

Connettivi Estensionali

- I connettivi della logica proposizionale sono estensionali.

- Quando la denotazione dipende solo dal valore di verità delle preposizioni che la compongono

- Esempio:
  - Sara è bruna **o** Mario è Biondo
  - x = 5 **e** y=7
  - **Se** oggi piove **allora** esco con l'ombrello

Connettivi Obliqui

- Non sono estensionali (ma non sono nella logica proposizionale).

- Quando la denotazione dipende dal senso del nome

- Esempio “poiché” :
  - 2 è un numero primo **poiché** è divisibile solo per 1 e per se stesso
  - 2 è un numero primo **poiché** 2 è pari

Scelta dei connettivi

- Perché considerare solo alcuni connettivi estensionali (non, e, o se... allora)?
  - Derivabilità
  - Economicità
  - Chiarezza
  - Scelta quasi del tutto arbitraria

- Noi: non, e, o, se…alllora

- Ad ogni connettivo è associata una operazione

Sintassi e Semantica

- **Sintassi**: grammatica, insieme delle regole che una proposizione deve seguire. Ci serve per stabilire le frasi sintatticamente corrette. Non diamo significato ai simboli

- **Semantica**: Interpretazione del linguaggio proposizionale, ovvero suo significato.

- **Calcolo**: Insieme di regole che ci permetta di stabilire la verità o la falsità di una proposizione del linguaggio

La sintassi

- Guarderemo le frasi come semplici stringhe senza dar loro alcun significato.
- Quali sono le frasi del linguaggio logico?
- Quali frasi sono permesse?
- Quali frasi non vanno bene?

Notazione

- Proposizioni atomiche: A, B, C,.....
- Proposizioni composte: P, Q
- Connettivi logici:
  - $\sim$ = non
  - $\wedge$ = e
  - $\vee$ = o
  - $\rightarrow$ = se…allora

Alfabeto

- L'alfabeto del linguaggio proposizionale contiene:
  - Simboli atomici (o lettere enunciative): $A, B, \ldots$
  - Connettivi logici: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$
  - Simboli ausiliari: $($, $)$.
- Come si possono combinare questi simboli?
  - $)A \sim (B$ è una formula del linguaggio?
  - $((A \vee B) \rightarrow C)$ è una formula del linguaggio?

Formule ben formate (FBF, fbf)

- Sono le formule corrette del linguaggio
- Sono definite in modo ricorsivo

- Def.1.2. L'insieme delle fbf è il minimo insieme X t.c.
  - Le proposizioni atomiche $A, B, .. \in X$
  - $\perp \in X$,
  - se $P \in X$ allora $(\neg P) \in X$,
  - se $P, Q \in X$ anche $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q) \in X$

Esempi di f.b.f.

- $((A \lor B) \rightarrow C)$ è una fbf?
  - $((A \lor B) \rightarrow C)$ è fbf sse $(A \lor B)$ è fbf e C è fbf.
  - $(A \lor B)$ è fbf sse A è fbf e B è fbf.
  - A, B, C sono fbf per definizione

  Sì!!!!!!

-)A ~ (B è una fbf? No! Perché?

- È facile provare l'appartenenza, meno facile provare la non appartenenza

Esempi di f.b.f.

- $)A \sim (B$ è una fbf?
  - Supponiamo lo sia
  - Sia Y=FBF-{)A ~ (B }
  - Y è t.c.:
    - $A, B \in Y$
    - $\perp \in Y$,
    - se $P \in Y$ allora $(\neg P) \in Y$,
    - se $P, Q \in Y$ anche $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q) \in Y$
  - Ma allora fbf non è il minimo insieme che soddisfa le condizione della Def 1.2
  - Assurdo
  - NO!!! $)A \sim (B$ non è una fbf

Sottoformule

- Sia P una fbf. le **sottoformule di** P, $\mathbf{Stfm}(\boldsymbol{P})$, sono così definite:
  - se P è una lettera enunciativa o ⊥ allora
    - $\mathrm{Stfm}(P) = \{P\}$.
  - se P è $\neg Q$ allora:
    - $\mathrm{Stfm}(P) = \{P\} \cup \mathrm{Stfm}(Q)$,
  - se P è $P1 \wedge P2, P1 \vee P2$ o $P1 \rightarrow P2$ allora:
    - $\mathrm{Stfm}(P) = \{P\} \cup \mathrm{Stfm}(P1) \cup \mathrm{Stfm}(P2)$.

Esempio di Sottoformule

- $((A \lor B) \to C)$:
  - $((A \lor B) \to C)$
  - $(A \lor B)$
  - C
  - A, B

Regole di precedenza

- $((A \lor B)\ \ C)$ è una fbf ma contiene troppe parentesi!
- Per evitare l’uso di molte parentesi si fissa una precedenza nell'uso dei connettivi:
  - $\neg > \land > \lor > \rightarrow$ $\qquad$ $>$ significa precede
  - connettivi uguali si intendono associati a sinistra
- $\big((A \lor (\neg B)\big) \rightarrow C)$ è equivalente a $A \lor \neg B \rightarrow C$
- $(A \rightarrow B) \lor C$ non è equivalente a $A \rightarrow B \lor C$
- $A \rightarrow B \lor C$ è equivalente a $A \rightarrow (B \lor C)$

Rappresentazione ad albero

- $((A \vee B) \rightarrow C)$ ha come **albero di struttura**:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \rightarrow \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \vee \arrow[dl] \arrow[dr] & & C \\
A & & B &
\end{tikzcd}
$$

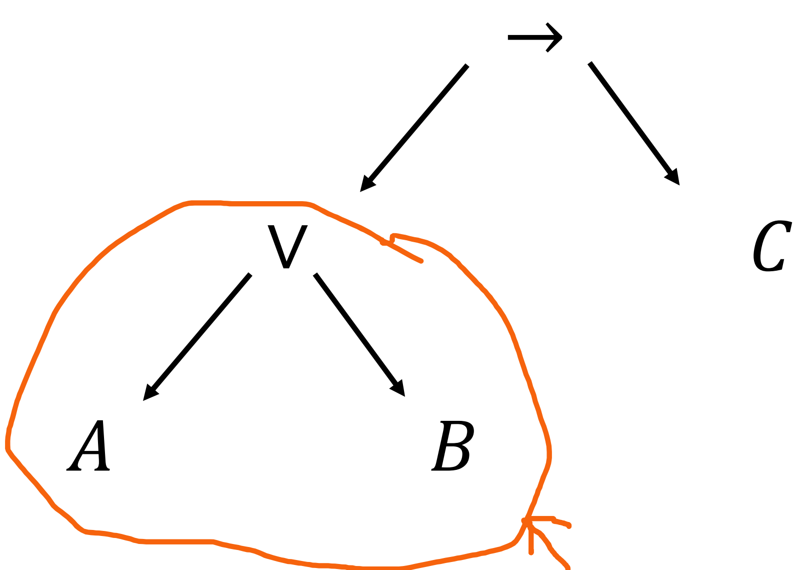
Alberi di struttura

- Un albero di struttura ha:
  - come **radice** l'ultimo connettivo usato (connettivo principale),
  - come **foglie** le lettere enunciative,
  - come **nodi interni** connettivi.

- Ogni nodo è la radice di un sottoalbero di struttura di una sottoformula
- Ogni sottoformula ha come albero di struttura il sottoalbero che ha come radice il nodo etichettato dal suo connettivo principale.

Sottoalberi e sottoformule

- $((A \vee B) \rightarrow C)$



- $A \vee B$ corrisponde al sottolbero

Principio di Induzione Strutturale

- Le fbf sono definite in modo ricorsivo.
- Per dimostrare le proprietà delle fbf useremo il metodo di dimostrazione per induzione strutturale.
- Ovvero se si dimostra che una proprietà è vera per ogni possibile "struttura" di una fbf allora è vera per tutte le fbf

Principio di Induzione Strutturale

Thm 1.4 (Principio di Induzione Strutturale):

Sia $\mathbb{P}$ una proprietà, se:

- $\mathbb{P}$ vale per ogni proposizione atomica
- $\mathbb{P}$ vale per $\bot$,
- $\mathbb{P}$ vale per P, allora si può dimostrare che $\mathbb{P}$ vale anche per $\neg P$
- $\mathbb{P}$ vale per P e Q, allora si può dimostrare che $\mathbb{P}$ vale anche per $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$

Allora $\mathbb{P}$ vale per tutte le fbf

Principio di Induzione Strutturale

Dim Thm 1.4

- $Y = \{Q \in \mathrm{FBF} | \mathbb{P} \text{ vale per } Q\}$
- Dobbiamo dimostrare che $Y = FBF$ Per definizione, $Y \subseteq \mathrm{FBF}$
- Dobbiamo dimostrare che $Y \supseteq \mathrm{FBF}$
  - Y contiene proposizione atomiche, ⊥, se contiene P,Q contiene $\neg\mathrm{P}, Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$
  - ma per la def di fbf allora $Y \supseteq \mathrm{FBF}$ $\square$

Principio di Induzione Struttura

- Lo useremo perché basterà valida per ogni fbf basta dimostrarlo per:
  - Caso Base
    $\mathbb{P}$ vale per proposizioni atomiche e $A, B, \ldots$ e per $\bot$
  - Casi Induttivi:
    - Se vale per Q allora vale $\neg Q$
    - Se vale per P e Q allora vale $\mathrm{P} \wedge Q$
    - Se vale per P e Q allora vale $\mathrm{P} \vee Q$
    - Se vale per P e Q allora vale $\mathrm{P} \rightarrow Q$

Esempio di induzione strutturale

Provare che ogni formula ben formata contiene lo stesso numero di parentesi aperte e chiuse

La semantica

- **Obiettivo**: attribuire un valore di verità ad una fbf
- Valori di verità:
  - 1 è la denotazione del valore “vero”
  - 0 è la denotazione del valore “falso”
- Partiamo dai valori di verità delle proposizione atomiche che compongono la formula.
- Estendiamo alle composte in base al significato dei connettivi

Funzione semantica o Interpretazione

- Una funzione $v: FBF \rightarrow \{0,1\}$ è un'**interpretazione** se:
  - Sia A una proposizione atomica allora
    - v(A) = 1 se A è vera
    - v(A) = 0 se A è falsa
  - $v(\bot) = 0$
  - $v(\neg P) = 1 - v(P)$
  - $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$
  - $v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$
  - $v(P \rightarrow Q) = 0 \iff v(P) = 0 \text{ e } v(Q) = 1$

La Negazione

- $\neg P$ è vera quando P è falsa
- $v(\neg P) = 1 - v(P)$
- Rappresentazione con la tavola di verità:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{\neg P}$
0	1
1	0

Congiunzione

- $P \wedge Q$ è vera sse P è vera e Q è vera.
- $v(P \wedge Q) = 1 \Leftrightarrow v(P) = 1 \text{ e } v(Q) = 1$
- $v(P \wedge Q) = \min\big(v(P), v(Q)\big)$
- Rappresentazione con la tavola di verità:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disgiunzione

- $P \vee Q$ è vera sse almeno una tra P e Q è vera.
- $v(P \vee Q) = 1 \Leftrightarrow v(P) = 1 \text{ o } v(Q) = 1$
- $v(P \wedge Q) = \max\left(v(P), v(Q)\right)$
- Rappresentazione con la tavola di verità:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicazione $P \to Q$

- se $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$ allora $v(P \to Q) = 1$
- se $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$ allora $v(P \to Q) = 0$
- se $v(P) = 0$ allora $v(P \to Q) = 1$
- Rappresentazione con la tavola di verità:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implicazione

Osservazione:

- $v(P \rightarrow Q) = 1 \Leftrightarrow \; v(P) = 0 \;\text{ o }\; v(Q) = 1$
- $v(P \rightarrow Q) = 1 \Leftrightarrow v(P) \leq v(Q)$
- $v(P \rightarrow Q) = 0 \Leftrightarrow \; v(P) = 1 \;\text{ e }\; v(Q) = 0$
- $v(P \rightarrow Q) = \; v(\neg P \vee Q))$
- $v(P \rightarrow Q) = \max\left(v(\neg P), v(Q)\right)$
- $v(P \rightarrow Q) = \max\left(1 - v(P), v(Q)\right)$

Funzione semantica o Interpretazione

- Una funzione $v: FBF \rightarrow \{0,1\}$ è un'**interpretazione** se:
  - Sia A una proposizione atomica allora
    - v(A) = 1 se A è vera
    - v(A) = 0 se A è falsa
  - $v(\bot) = 0$
  - $v(\neg P) = 1 - P$
  - $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$
  - $v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$
  - $v(P \rightarrow Q) = 0 \iff v(P) = 0 \text{ e } v(Q) = 1$

Proprietà dell'Interpretazione

- L'interpretazione di una P dipende solo dall'interpretazione delle proposizioni atomiche che la compongono

- Lemma 1.6: Sia P una fbf e v, v' due interpretazioni.
  - Se $v(A) = v'(A)$ per ogni proposizione atomica che compare in P
  - allora $v(P) = v'(P)$

Dimostrazione Lemma 1.6

Per induzione strutturale:

- (Caso Base) dimostriamo che la proprietà è vera per le proposizioni atomiche e per $\perp$
- (Caso Induttivo) dimostriamo che la proprietà è vera per ogni connettivo ($\neg$,$\wedge$,$\vee$, $\rightarrow$) essendo vera per le sottoformule
- L'induzione strutturale ci garantisce che la proprietà è vera per **ogni proposizione.**

Dimostrazione Lemma 1.6

- **Caso base:** proposizioni atomiche, $\perp$
  - Caso $P \ = \ A$ proposizione atomica
    - *Dobbiamo dimostrare che* $v(P) = v'(P)$
    - Per *ipotesi* sappiamo che per ogni proposizione atomica A è vero che $v(A) = v'(A)$ quindi $v(P) = v'(P)$
  - Caso $P \ = \perp$. Per definizione di interpretazione:
    - $v(\perp) = 0 = v'(F)$.

Dimostrazione Lemma 1.6

- **Caso induttivo :** negazione,
  Dobbiamo dimostrare che v($\neg P$)=v'($\neg P$)
  - Per *ipotesi induttiva* sappiamo che $v(P) = v'(P)$
  - quindi $v(\neg P) = 1 - v(P) = 1 - v'(P) = v(\neg \mathrm{P})$

- **Caso induttivo :** congiunzione,
  Dobbiamo dimostrare che v($P \wedge Q$)=v'($P \wedge Q$)
  - Per *ipotesi induttiva* sappiamo che $v(Q) = v'(Q)$ e che $v(P) = v'(P)$
  - quindi $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) = \min(v'(P), v'(Q)) = v'(P \wedge Q)$

- Gli altri lasciati come esercizio

Esempio di interpretazione

- Data l'insieme delle formule atomiche $\{A, B, C\}$ e v un'interpretazione così definita :
  - $v(A) = 0$
  - $v(B) = 1$
  - $v(C) = 0$
- Trova il valore di verità di queste formule composte:
  - $v(A \wedge B)$
  - $v(\neg A \wedge (B \vee C))$

Esempio di interpretazioni

- $\boldsymbol{P} = \neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A} \rightarrow (A \vee \boldsymbol{B}))$

int	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{P}$
v_1	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	0	1	1	1	1
v_4	1	1	1	0	1	1	0