Permutazioni

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $J_n \overset{def}{=} \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Def Una permutazione è una funzione biiettiva $\sigma : J_n \to J_n$. L'insieme delle permutazioni di J_n è denotato con S_n (o con Σ_n).

Si ha quindi $S_n \overset{def}{=} \{ \sigma : J_n \to J_n \mid \sigma \text{ biiettiva} \}$

Con $id \in S_n$ denotiamo la permutazione identica, cioè $id(j) = j \quad \forall j \in J_n$, quindi $id \in S_n$.

OSS $\sigma, \pi \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \pi \in S_n$, $\sigma^{-1} \in S_n$, $id \in S_n$.

Pertanto, S_n è un gruppo rispetto alla composizione, id è l'elemento neutro.

Def S_n è detto gruppo simmetrico su n elementi.

Teorema $\# S_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Dim $\forall \sigma \in S_n$ deve essere biiettiva, quindi $\sigma(1) \in J_n$ può essere scelto in n modi

Una volta scelto $\sigma(1)$, per $\sigma(2)$ restano $n-1$ scelte e quindi per $\sigma(3)$ restano $n-2$ scelte, e così via fino a $\sigma(n)$ che può essere scelto in un modo solo. Quindi in totale abbiamo

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ possibilità.

Una permutazione $\sigma \in S_n$ può essere rappresentata con una matrice $2 \times n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Es $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_2$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

Se $\sigma \in S_n$ e $h \in \mathbb{Z}$ definiamo la potenza

$$\sigma^h \stackrel{def}{=} \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{h \text{ volte}} \qquad \text{se } h > 0$$

$$\sigma^0 \stackrel{def}{=} id$$

$$\sigma^h \stackrel{def}{=} (\sigma^{-1})^{-h} \qquad \text{se } h < 0$$

Def Una permutazione $\sigma \in S_n$ è detta <u>k-ciclo</u> o ciclo di lunghezza $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se esistono k numeri $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$, a due a due distinti, tali che

$$a_2 = \sigma(a_1), \ a_3 = \sigma(a_2), \ \dots, \ a_k = \sigma(a_{k-1}), \ a_1 = \sigma(a_k)$$

e $\sigma(j) = j \ \ \forall j \neq a_1, a_2, \dots, a_k$.

Un tale ciclo si denota con $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Un 2-ciclo è detto <u>trasposizione</u>.

Due cicli $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$ e $\tau = (b_1, \dots, b_s)$ sono detti <u>disgiunti</u> se

$$\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_s\} = \emptyset$$

È facile vedere che due cicli disgiunti $\sigma, \tau \in S_n$ commutano, cioè $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ (ma S_n <u>non</u> è abeliano per $n \geq 3$).

<u>**Es**</u> In S_2, $(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

In S_3, $(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(3\ 2\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$.

Sia ora $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in $x_1, \dots, x_n$. Se $\sigma \in S_n$ e $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ possiamo definire $\sigma(f) \overset{def}{=} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, cioè permutiamo le variabili mediante σ.

<u>**Es**</u> $\sigma = (1\ 2) \in S_2$, $f = x_1 x_2 - x_1^2 + 3x_2 \rightsquigarrow$

$\sigma(f) = x_2 x_1 - x_2^2 + 3x_1$

Se $\sigma \in S_n$ abbiamo un'applicazione indotta

$$\sigma : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$
$$\sigma(f) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Si vede subito che è <u>lineare</u> e

$\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g) \quad \forall\, f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

Sia ora $p_n \overset{def}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

Si osserva che $\sigma(x_i - x_j) = x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ è uno dei fattori di p_n a meno del segno $\pm$

Quindi $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(p_n) = \pm p_n$.

Def Sia $\sigma \in S_n$. Chiamiamo segno di σ il numero $\operatorname{sgn} \sigma \in \{1, -1\}$ t.c.

$$\sigma(p_n) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, p_n .$$

Diciamo che σ è pari se $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ e in caso contrario diciamo che σ è dispari. Ha quindi senso parlare della parità di σ.

Es $\sigma = (1\ 2) \in S_2 \rightsquigarrow \sigma(p_2) = \sigma(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 = -p_2$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(1\ 2) = -1$ e $(1\ 2)$ è dispari.

$\operatorname{sgn}(id) = 1$ (id è pari).

OSS Il segno (o equivalentemente la parità) di σ è determinato dalla parità del numero di inversioni di σ, cioè il numero di elementi di

$I(\sigma) \overset{def}{=} \{(i, j) \in J_n \times J_n \mid i < j \text{ e } \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

Questi in effetto determinano il numero di segni $-$ che si hanno in $\sigma(p_n)$.

Quindi si possono contare le inversioni.

Es $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ha 3 inversioni $\Rightarrow \operatorname{sgn} \sigma = -1$

Teorema Siano $\sigma, \tau \in S_n$. Allora

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).$$

Dim $(\sigma \circ \tau)(p_n) = \sigma(\tau(p_n)) = \sigma((\operatorname{sgn}\tau)\, p_n) =$

$= (\operatorname{sgn}\tau)\, \sigma(p_n) = (\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\sigma)\, p_n \Rightarrow$

$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$.

Sia ora $(i\ j) \in S_n$ una trasposizione, $i<j$

$$(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & \underbrace{j & \cdots & i}_{\text{inversione}} & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Le inversioni sono

$$\underbrace{(i, i+1), \dots, (i, j)}_{j-i}, \underbrace{(i+1, j), \dots, (j-1, j)}_{j-1-i}$$

in totale $2j - 2i - 1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(i\ j) = -1}$$

Le trasposizioni sono tutte dispari.

Si può far vedere che se $\sigma \in S_n$ è un k-ciclo allora $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{k-1}$.

Es $(1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{sgn}(1\,2\,3) = 1$.

Determinante

Def Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.
Il determinante di A è definito come

$$\det A = |A| \overset{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{K}$$

Questa si chiama formula di Leibniz.
La sommatoria precedente è su $\sigma \in S_n$, quindi vi è un addendo per ogni permutazione: in totale $n!$

Es Se $n = 1$, $\det(a) = a$.

Se $n = 2 \rightsquigarrow S_2 = \{ id, (1\,2) \}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 + 6 = 11.$$

$n = 3 \implies 6$ addendi

$$S_3 = (\underset{+}{id}, \underset{+}{(1\,2\,3)}, \underset{+}{(1\,3\,2)}, \underset{-}{(1\,2)}, \underset{-}{(1\,3)}, \underset{-}{(2\,3)})$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21} -$$

$$- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Un determinante 4×4 ha $4! = 24$ addendi e un determinante 5×5 ne ha $5! = 120$.

OSS $\det I_n = 1$, infatti le entrate sono $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ quindi l'unico termine che rimane è quello corrispondente a $id \in S_n$.

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \det A \end{aligned}$$

funzione determinante