Richiamiamo il teorema sui moltiplicatori di Lagrange.

Teorema 1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di Ω ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziable in $\boldsymbol{x}_0$. Sia $g : \Omega \to \mathbb{R}^{M-N}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che*

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}, \qquad e\ Jg(\boldsymbol{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Posto

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\},$$

se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$ allora esistono $(N-M)$ numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-M}$ tali che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}_0).$$

I numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-M}$ si chiamano **moltiplicatori di Lagrange**.

Pertanto per trovare i punti di minimo o massimo di f sul vincolo di equazione $g(\boldsymbol{x}) = 0$ dovremo dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni (non lineare) nelle incognite $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-M}$.

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}). \\ g(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

Esplicitiamo il sistema trovando:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) = 0\,. \end{cases}$$

Portando tutto al membro sinistro troviamo equivalentemente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_{N-M} \dfrac{\partial g_{N-M}}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g(\boldsymbol{x}) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{2N-M} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_N, \lambda_1, \ldots \lambda_{N-M}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x})$$

$\mathcal{L}$ viene chiamata **Lagrangiana**. L'introduzione della funzione Lagrangiana permette di riscrivere il sistema (1) nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g(\boldsymbol{x}) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Osserviamo che l'equazione del vincolo è data da:

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots \\ g_{N-M}(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

e che per ogni $k = 1, \ldots, N-M$

$$g_k(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(\boldsymbol{x})\,.$$

Il sistema (2) può essere quindi riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{N-M}}(\boldsymbol{x}) = 0\,. \end{cases}$$