LOGICA

Lezione 3: Ancora Logica Proposizionale

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della Lezione

- Soddisfacibilità e modelli
- Tautologia
- Conseguenza semantica
- Teorema di deduzione semantica
- Teorema di compattezza
- Equivalenza semantica
- Completezza Funzionale
- (Forme normali)

Fbf soddisfacibili

- Dati v interpretazione, $P \in FBF$ se $v(P) = 1$ si dice che v soddisfa P o che v è un **modello** di P, e si scrive $v \vDash P$

- Una fbf P si dice **soddisfacibile** se esiste almeno una interpretazione v che la soddisfa, i.e. tale che $v \vDash P$

Esempio

- $P = \neg(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow (B \vee A))$ è soddisfacibile perché $\exists v_i \vDash P$.

int	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{\neg(A \wedge B)}$	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow (A \vee B)}$	$\boldsymbol{\neg(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow (B \vee A))}$
v_1	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	0	1	1	1	1
v_4	1	1	1	0	1	1	0

Tautologia

- Una fbf P per cui ogni interpretazione è un modello si dice tautologia e si scrive $\models P$
- Esempio: $(A \rightarrow (A \vee B))$ è una tautologia

int	A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \vee B$	$A \rightarrow (A \vee B)$	$\neg(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow (B \vee A))$
v_1	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	0	1	1	1	1
v_4	1	1	1	0	1	1	0

Fbf Contraddittoria

- Se non è soddisfacibile, i.e. non ammette modelli, si dice **contraddittoria** o **insoddisfacibilie**, $\not\models P$
- Esempio $A \wedge \neg A$ è insoddisfacibile

int	A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
v_1	0	0	0
v_2	0	1	0

Numero di Interpretazioni

- Se una proposizione contiene n proposizioni atomiche distinte quante possibili interpretazioni può avere?

- $n = 1$, sono 2. Es: la negazione
- $n = 2$, sono 4. Es: la disgiunzione

- Una proposizione con n proposizioni atomiche contiene 2^n

Tautologia ed Insoddisfacibilità

- Thm 1.4 : P Tautologia $\Leftrightarrow \neg P$ è insoddisfacibile
- Dim
  - P tautologia
  - , $v \vDash P$
  - $\forall v, v(P) = 1$
  - $\forall v, v(\neg P) = 1 - v(P)$=0
  - $\neg P$ è insoddisfacibile

Lavorando con gli Insiemi

I concetti di modello, soddisfacibilità e insoddisfacibilità si possono estendere ad un insieme Γ di fbf:

- Un **modello** per Γ è una interpretazione v che sia modello per ogni fbf di Γ
- Γ è **soddisfacibile** se ammette un modello
- Γ è **insoddisfacibile** se nessuna interpretazione è un modello per Γ

Conseguenza Semantica

- Q è **conseguenza semantica** di un insieme di fbf Γ , se e solo se ogni modello di Γ è un modello di Q, e si scrive $\Gamma \vDash Q$

- $\Gamma \vDash Q$ se e solo se $\forall v\ t.c\ (\forall P_i \in \Gamma\ v(P) = 1$ implica $v(Q) = 1$

- $\mathrm{P} \vDash Q$ se e solo se $\forall v\ t.c\ v(P) = 1$ implica $v(Q) = 1$, i.e. se ogni modello di P e` modello di Q

Esempio

- $\Gamma = \{\neg A, A \to B\}$ e $P = (\neg A \lor B)$
- modelli di Γ sono $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$, ed entrambi sono modelli di P

			Γ		
int	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{v_1}$	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v_2}$	0	1	1	1	1
v_3	1	0	0	0	0
v_4	1	1	0	1	1

- $\Gamma \vDash P$

Th. deduzione semantica

- **Thm 1.15 di deduzione semantica:**
  - $\boldsymbol{\Gamma \cup \{P\} \vDash Q \Leftrightarrow \Gamma \vDash P \rightarrow Q}$
- **Dim(⇒):** Sia v un modello per Γ, dobbiamo dim che $v(P \rightarrow Q) = 1$
  - caso 1: v(P)=1 dall'ipotesi si ha v(Q)=1 e quindi $v(P \rightarrow Q) = 1$,
  - caso2: v(P)=0. Si ha $v(P \rightarrow Q) = 1$
- **Dim(⇐):** Sia v un modello per $\Gamma \cup \{P\}$, dobbiamo dim che $v(Q) = 1$
  - allora $v \vDash \Gamma$ e $v(P) = 1$
  - se $v \vDash \Gamma$ dall'ipotesi ho che $v(P \rightarrow Q) = 1$
  - ma se $v(P) = 1$ e $v(P \rightarrow Q) = 1$ $v(Q) = 1$. $\square$

Deduzione Semantica

$$P \vDash Q \iff \vDash P \rightarrow Q$$

Significa che per dimostrare che $P \vDash Q$ basta dimostrare che $P \rightarrow Q$ è una tautologia

Conseguenza e insodd.

Lemma 1.13 $\boldsymbol{\Gamma \vDash P \iff \Gamma \cup \{\neg P\}}$ **è insoddisfacibile**

Dim(⇒): Sia v una qualunque interpretazione:

- se $\mathrm{v(P_i)} = 1\ \forall P_i \in \Gamma$ allora (per hp) $v(P) = 1$ e quindi $v(\neg P) = 0$ e non può essere un modello per $\Gamma \cup \{\neg P\}$
- se $\mathrm{v(P_i)} = 0$ per un $P_i \in \Gamma$ allora e\` insoddisfacibile per Γ e non può essere un modello per $\Gamma \cup \{\neg P\}$
- ma allora $\Gamma \cup \{\neg P\}$ e\` insoddisfacibile

Conseguenza e insodd.

Lemma 1.13 $\boldsymbol{\Gamma \vDash P \iff \Gamma \cup \{\neg P\}}$ è insoddisfacibile

Dim($\Leftarrow$):

- $\Gamma \cup \{\neg P\}$ insoddisfacibile significa che $v(\neg P) = 0$ o $\mathrm{v}(\mathrm{P_i}) = 0$ per un $P_i \in \Gamma$
- Se v è un modello per Γ allora $\mathrm{v}(\mathrm{P_i}) = 1\ \forall P_i \in \Gamma$
- allora devo essere necessariamente $v(\neg P) = 0$ e quindi $v(P) = 1$
- dunque ogni modello di Γ è modello di P, i.e. $\Gamma \vDash P$ $\square$

Esempio: Testo e Formalizzazione

Testo

- Ipotesi:
  - Se Carlo è americano e Giovanni non è francese, allora Elena è tedesca
  - Se Elena è tedesca, allora Lucia è spagnola o Giovanni è francese
  - Se Lucia non è spagnola allora Carlo è americano
  - Giovanni non è francese.
- Tesi:
  - Lucia è spagnola

Esempio: Testo e Formalizzazione

Testo

- Ipotesi:
  - Se Carlo è americano e Giovanni non è francese, allora Elena è tedesca
  - Se Elena è tedesca, allora Lucia è spagnola o Giovanni è francese
  - Se Lucia non è spagnola allora Carlo è americano
  - Giovanni non è francese.
- Tesi:
  - Lucia è spagnola

Esempio: Testo e Formalizzazione

Formalizzazione

- A = Carlo è americano , B = Giovanni è francese,
  C = Elena è tedesca , D = Lucia è spagnola
- Ipotesi:
  - Se Carlo è americano e Giovanni non è francese, allora Elena è tedesca: $A \wedge \neg B \rightarrow C$
  - Se Elena è tedesca, allora Lucia è spagnola o Giovanni è francese: $C \rightarrow D \vee B$
  - Se Lucia non è spagnola allora Carlo è americano: $\neg D \rightarrow A$
  - Giovanni non è francese: $\neg B$
- Tesi:
  - Lucia è spagnola: D

Esempio: Testo e Formalizzazione

- $P = (A \land \neg B \rightarrow C) \land (C \rightarrow D \lor B) \land (\neg D \rightarrow A) \land (\neg B)$

- $P \vDash D$

- Per il teorema di deduzione semantica: $\vDash P \rightarrow D$

- Basta dimostrare che $P \rightarrow D$ è una tautologia

A	B	C	D	$A \wedge \neg B \rightarrow C$	$C \rightarrow D \vee B$	$\neg D \rightarrow A$	$\neg B$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{P \rightarrow D}$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Teorema di Compattezza

Thm 1.18 Un insieme Γ di fbf è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ $\forall$ suo sottoinsieme Δ finito lo è

- **Dim($\Rightarrow$):**
  - Per hp: Γ è soddisfacibile. Allora per la definizione di soddisfacibilità, $\exists\, v$ modello di Γ che è modello di ogni formula in Γ. Quindi ogni sottoinsieme di Γ ha almeno un modello
- **Dim($\Leftarrow$):**
  - Sia v un modello comune a tutti i sottoinsiemi finiti di Γ.
  - Ogni $P \in \Gamma$ può essere vista come un $\{P\}$ sottoinsieme finito di Γ
  - v è quindi un modello per tutte le formule di Γ
  - perciò v e` un modello per Γ.

  - Devo dimostrare che esiste un modello comune a tutti i sottoinsiemi finiti di Γ

(Dim) Teorema di Compattezza

- **Dim($\Leftarrow$):** Devo dimostrare che esiste un modello comune a tutti i sottoinsiemi finiti di Γ. Lo facciamo dimostrando che
  1. Tutti i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna alla lettera enunciativa A_1 un valore fissato $v(A_1)$.
  2. Se tutti i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna alle prop atomiche $A_1, A_2, \dots, A_n$ la n-upla di valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n)$
     - Allora è possibile assegnare un valore $v(A_{n+1})$ ad A_{n+1} in modo che tutti i sottoinsiemi finiti di Γ abbiano almeno un modello che assegni alle prop atomiche $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ i valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_{n+1})$

(Dim) Teorema di Compattezza

Dim(1): Tutti i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna prop atomica A_1 un valore fissato $v(A_1)$.

Se così non fosse ci sarebbero due sottoinsiemi finiti Δ_1 e Δ_2 di Γ t.c.:

- in tutti i modelli del primo A_1 vale 0,
- in tutti i modelli del secondo ad A_1 vale 1

ma allora il sottoinsieme finito $\Delta_1 \cup \Delta_2$ di Γ è insoddisfacibile, ma questo è assurdo.

(Dim) Teorema di Compattezza

Dim(2): Supponiamo che

- tutti i sottoinsiemi finiti di Γ abbiano almeno un modello che assegna alle prop atomiche $A_1, A_2, \dots, A_n$ la n-upla di valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n)$

Dimostriamo che

- è possibile assegnare un valore $v(A_{n+1})$ ad A_{n+1} in modo che tutti i sottoinsiemi finiti di Γ abbiano almeno un modello che assegni alle prop atomiche $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ i valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n), v(A_{n+1})$

(Dim) Teorema di Compattezza

Dim(2):

- Se tutti i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna alle prime n+1 prop atomiche $A_1, A_2, \dots, A_n$ i valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n), \boldsymbol{v(A_{n+1}) = 0}$, abbiamo concluso.
- Altrimenti esiste almeno un sottoinsieme finito Δ_3 di Γ t.c. tutti i modelli di Δ_3 che assegnano alle prime n prop i valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n)$ devono assegnare ad A_{n+1} il valore 1.
  - dimostriamo per assurdo che i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna alle prime n+1 lettere i valori $v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n), \boldsymbol{v(A_{n+1}) = 1}$.

(Dim) Teorema di Compattezza

Dim(2):

- Tutti i sottoinsiemi finiti di Γ hanno almeno un modello che assegna alle prime n+1 prop atomiche i valori $v(A_1), v(A_2), \ldots, v(A_n), \boldsymbol{v(A_{n+1}) = 1}$.
  - Altrimenti esisterebbe almeno un sottoinsieme finito Δ_4 di Γ t.c. tutti i modelli di Δ_4 che assegnano alle prime n prop i valori $v(A_1), v(A_2), \ldots, v(A_n)$, devono assegnare ad A_{n+1} il valore 0.
  - Ma allora il sottoinsieme finito $\Delta_3 \cup \Delta_4$ di Γ , non potrebbe avere un modello che assegni alle prime n prop atomiche prop atomiche $A_1, A_2, \ldots, A_n$ I valori $v(A_1), v(A_2), \ldots, v(A_n)$, assurdo (per l'ipotesi fatta).

Corollari

- **Thm 1.19:** Γ è insoddisfacibile sse esiste un sottoinsieme finito Δ di Γ insoddisfacibile

- **Thm 1.20 :** $\Gamma \vDash P$ sse esiste un sottoinsieme finito Δ di Γ t.c. $\Delta \vDash P$
  - **Dim(⇒):**
    - Se $\Gamma \vDash P$, allora $\Gamma \cup \{\neg P\}$ è insoddisfacibile
    - Quindi per il primo corollario, esiste un suo sottoinsieme finito $\Delta \cup \{\neg P\}$insoddisfacibile
    - Perciò $\Delta \vDash \mathrm{P}$.
  - **Dim(⇐):** l'implicazione contraria e' ovvia.

Osservazioni su →

- Se oggi è martedì (A) allora domani piove (B),
- oppure se domani piove (B) allora oggi è martedì (A) .

- $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$

Osservazioni su $\rightarrow$

- È una tautologia anche se la frase non ha molto senso!!!

- $A \rightarrow B$ viene letta normalmente come:
  - B si ottiene mediante un ragionamento logico da A. Per la logica prop. NO!

  - Vedremo che questo concetto viene espresso con $A \vdash B$, ovvero se A e` vero allora possiamo concludere B

Equivalenza Semantica

- Una formula P è **(semanticamente) equivalente** a Q, **P ≡ Q**, se tutti e soli i modelli di P sono modelli di Q, i.e. se
$$v(P) = v(Q) \qquad \forall v$$

- OSS 1: P ≡ Q sse $P \vDash Q$ e Q $\vDash P$

- OSS 2:P ≡ Q sse $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = P \leftrightarrow Q$ e\` una tautologia

Esempio

- $\neg A \wedge (A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$

- Basta dimostrare che $\forall v,\ v(\neg A \wedge (A \rightarrow B) = v(\neg A \vee B))$

- Per dimostrare che $P \not\equiv Q$ basta trovare un v t.c. $v(P) \neq v(Q)$

Equivalenze Semantiche

- Idempotenza:
  - $P \lor P \equiv P$
  - $P \land P \equiv P$
- Commutatività:
  - $P \lor Q \equiv Q \lor P$
  - $P \land Q \equiv Q \land P$
- Associatività:
  - $(P \lor Q) \lor R \equiv P \lor (Q \lor R)$
  - $(P \land Q) \land R \equiv P \land (Q \land R)$

Equivalenze Semantiche

- Assorbimento:
  - $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
  - $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
- Distributività:
  - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
  - $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- Leggi di De Morgan:
  - $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Equivalenze Semantiche

- Doppia Negazione
  - $\neg(\neg P) \equiv P$
- Implicazione
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$
- Elementi Neutri
  - $P \equiv \perp \vee P$
  - $P \equiv \neg \perp \wedge P$

Funzioni di Verità

Sia P una fbf con n proposizioni atomiche distinte A_1 , … , A_n , la **funzione di verità di $\boldsymbol{P}$** è la funzione :

$$\boldsymbol{f_P}\colon\ \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto f_P(a_1, \ldots, a_n) = v(P),$$

dove v è una interpretazione t.c. $v(A_i) = a_i$, $\forall A_i \in P$

Esempi di funzioni di Verità

La funzione di verità di $A \wedge B$ è:

$$f_{A \wedge B}\colon \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

t.c.

- $f_{(A \wedge B)}(0,0) = v_1(A \wedge B) = 0$ con $v_1(A) = 0, v_1(B) = 0$
- $f_{(A \wedge B)}(0,1) = v_2(A \wedge B) = 0$ con $v_2(A) = 0, v_2(B) = 1$
- $f_{(A \wedge B)}(1,0) = v_3(A \wedge B) = 0$ con $v_3(A) = 1, v_3(B) = 0$
- $f_{(A \wedge B)}(1,1) = v_4(A \wedge B) = 1$ con $v_4(A) = 1, v4(B) = 1$

Connettivi Derivabili

- $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ definisce un qualche connettivo n-ario.
- $f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, vi sono $2^{2^2} = 16$ funzioni.
- Esistono 16 connettivi binari differenti, ne abbiamo definiti solamente 3. Che possiamo dire degli altri connettivi?
- Un connettivo è (**semanticamente derivabile**) se è possibile definirlo in funzione di altri connettivi

Connettivi Derivabili

- Sia $\boldsymbol{C}$ un insieme di connettivi logici e c $\notin \boldsymbol{C}$, c è **(semanticamente) derivabile da C** se $\exists P \in FBF$ con solo connettivi di $\boldsymbol{C}$ t.c. $f_P = f_c$
- Esempio: A $\leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$

int	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{B \to A}$	$(A \to B) \land (B \to A)$	A $\leftrightarrow B$
v_1	0	0	1	1	1	1
v_2	0	1	1	0	0	0
v_3	1	0	0	1	0	0
v_4	1	1	1	1	1	1

Completezza funzionale

- Un insieme di connettivi logici si dice **funzionalmente completo** se per ogni funzione $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ esiste una fbf P costituita mediante questi e tale che $f_P = f$.

- Ovvero un insieme di connettivi è completo se ogni altro connettivo può essere derivato da essi.

Es di insiemi Completi

- Insiemi funzionalmente completi:
  - $\{\sim, \wedge, \vee\}$
  - $\{\sim, \wedge\}$
  - $\{\sim, \vee\}$
  - $\{\rightarrow, \bot\}$

- OSS: con $\{\rightarrow, \bot\}$ ho che:
$$A \wedge B = (((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow (B \rightarrow \bot)) \rightarrow \bot$$
Molto complicato!

- Noi usiamo un compromesso: $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$

Forme normali

- Trasformiamo una fbf in un'altra equivalente che ha una **forma canonica**

- Si trasforma la fbf originale sostituendo una sua componente con altre equivalenti fino ad arrivare alla forma canonica

- La forma canonica è detta normale perché non si può ulteriormente sostituire

Letterale, Disgiunzione, Congiunzione

- Un **letterale** è una formula atomica o la sua negazione, A o $\neg A$
- Una **disgiunzione** di fbf $P_1, P_2, \ldots, P_n$ è la formula $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$
- Una **congiunzione** di fbf $P_1, P_2, \ldots, P_n$ è la formula $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$

Forma Normale Congiuntiva (FNC) (**CNF** in inglese)

- Una fbf P è detta in **forma normale congiuntiva (FNC)** sse:
  - $P = P_1 \land P_2 \land \dots \land P_n$ con n ≥ 1
  - e $\forall i = 1, \dots, n \quad P_i$ è una disgiunzione di letterali: $P_i = L_1 \lor L_2 \lor \cdots \lor L_m$

- Es. $(A \lor \neg B \lor C) \land B \land \neg D \land (A \lor D)$

Forma Normale Disgiuntiva (FND) (**DNF** in inglese)

- Una fbf P è detta in **forma normale disgiuntiva (FND)** sse:
  - $P = P_1 \lor P_2 \lor \ldots \lor P_n$ con $n \geq 1$
  - e $\forall i = 1, \ldots, n \;\; P_i$ è una congiunzione di letterali: $P_i = L_1 \land L_2 \land \cdots \land L_m$

- Es. $(A \land \neg B \land C) \lor B \lor \neg D \lor (A \land D)$

FNC e FND

- Posso sempre scrivere una P in forma FNC o FND

- **Thm 1.33:** Per ogni fbf P esistono una FNC P^C e una FND P^D, tali che
$$P \equiv P^C \text{ e } P \equiv P^D$$

- **Dim** si usano le regole di equivalenza, le formule di De Morgan e le regole distributive.