ALGORITMI E STRUTTURE DATI

DIZIONARI: OLTRE GLI ALBERI BINARI DI RICERCA

- Abbiamo visto come possiamo implementare un dizionario usando alberi binari di ricerca
- Con gli alberi bilanciati (AVL, rosso-neri) possiamo ottenere tempi di ricerca, inserimento e rimozione $O(\log n)$
- Possiamo fare di meglio se, per esempio, assumiamo di non dover implementare minimo, massimo, successore, predecessore?

TABELLE DI HASH

DIZIONARI: OLTRE GLI ALBERI BINARI DI RICERCA

DIZIONARI: OLTRE GLI ALBERI BINARI DI RICERCA

- Supponiamo di conoscere tutti i possibili valori che una chiave può assumere: $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$. Assumiamo $K = \{0, \ldots, m-1\}$

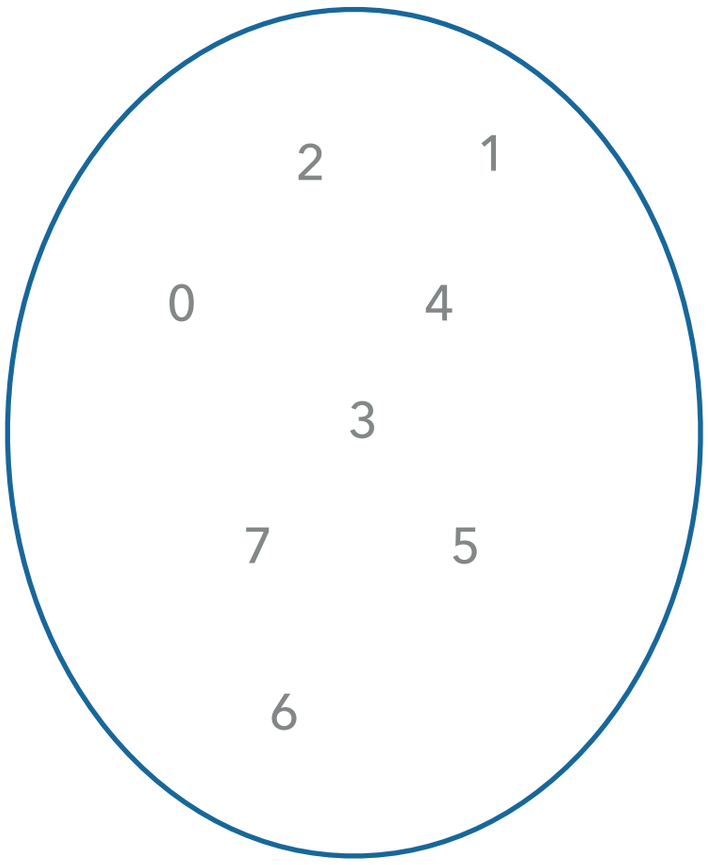
DIZIONARI: OLTRE GLI ALBERI BINARI DI RICERCA

- Supponiamo di conoscere tutti i possibili valori che una chiave può assumere: $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$. Assumiamo $K = \{0,\ldots, m-1\}$
- Se costruiamo un array di m elementi possiamo assegnare ad ogni chiave uno slot.

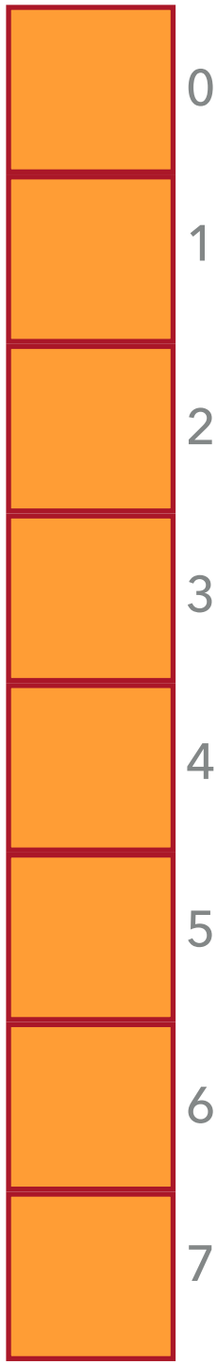
DIZIONARI: OLTRE GLI ALBERI BINARI DI RICERCA

- Supponiamo di conoscere tutti i possibili valori che una chiave può assumere: $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$. Assumiamo $K = \{0,\ldots, m-1\}$
- Se costruiamo un array di m elementi possiamo assegnare ad ogni chiave uno slot.
- Inserimento: mettere il valore nello slot k_i
- Ricerca: ritornare il contenuto dello slot k_i
- Rimozione: cancellare il valore contenuto nello slot k_i

IDEA DI BASE

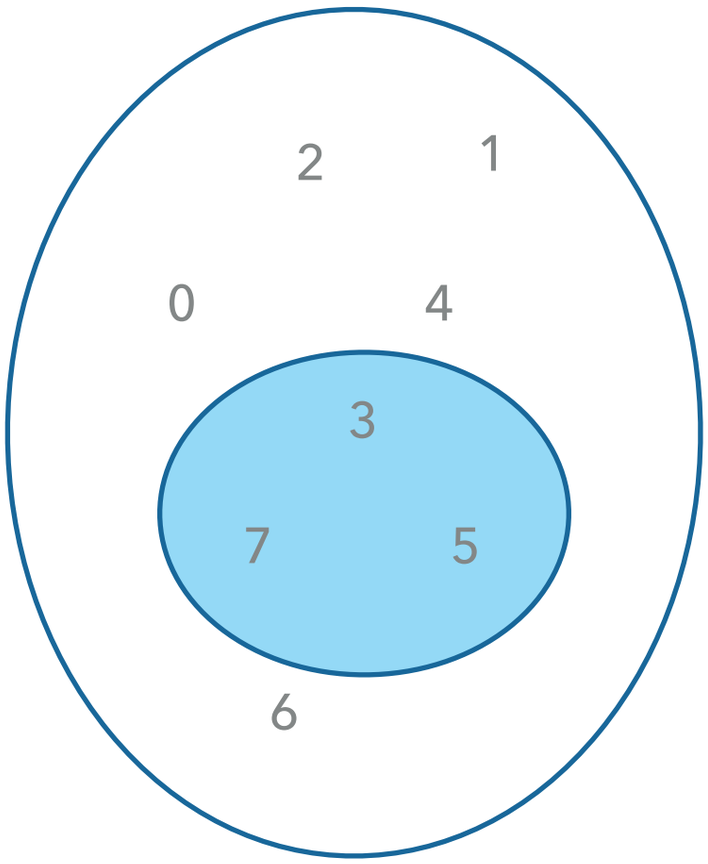


Universo di tutte
le chiavi possibili

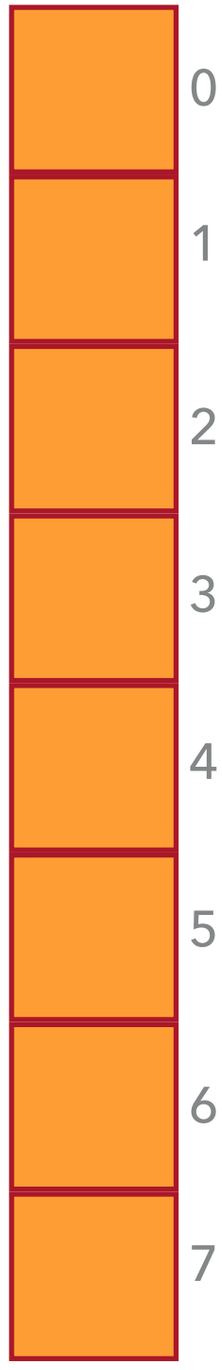


Array con una posizione
per ogni chiave

IDEA DI BASE

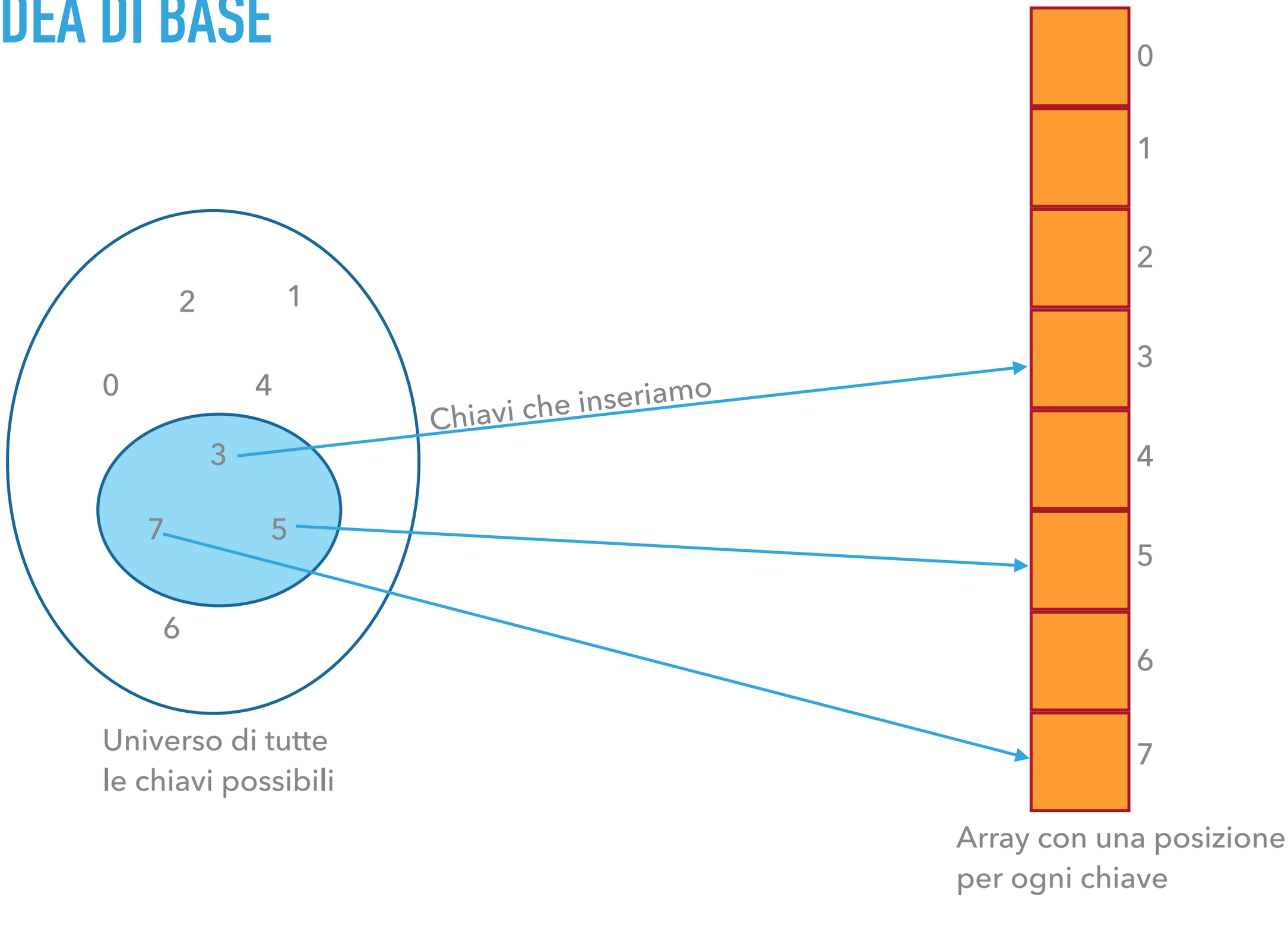


Universo di tutte
le chiavi possibili



Array con una posizione
per ogni chiave

IDEA DI BASE


2
1
0
4
3
7
5
6
Chiavi che inseriamo
0
1
2
3
4
5
6
7
Universo di tutte
le chiavi possibili
Array con una posizione
per ogni chiave

OPERAZIONI DEI DIZIONARI

Inserimento

Parametri: x (l’oggetto da inserire) e la tabella T

T[x.key] = v

Ricerca

Parametri: k (la chiave) e la tabella T

return T[k]

Rimozione

Parametri: x (l’oggetto da rimuovere) e la tabella T

T[x.key] = None

CI SONO DEI PROBLEMI?

CI SONO DEI PROBLEMI?

- Questo approccio ci permette di fare ricerca, inserimento e rimozione in tempo costante!
- Problema: l'insieme di tutte le chiavi potrebbe non essere abbastanza piccolo da permettere questo approccio.

CI SONO DEI PROBLEMI?

- Questo approccio ci permette di fare ricerca, inserimento e rimozione in tempo costante!
- Problema: l'insieme di tutte le chiavi potrebbe non essere abbastanza piccolo da permettere questo approccio.
- Esempio: con numeri di 32 bit si avrebbero circa quattro miliardi di slot, anche salvando solo un byte per ogni slot avremmo 4GB di memoria occupati!

CI SONO DEI PROBLEMI?

- Questo approccio ci permette di fare ricerca, inserimento e rimozione in tempo costante!
- Problema: l'insieme di tutte le chiavi potrebbe non essere abbastanza piccolo da permettere questo approccio.
  - Esempio: con numeri di 32 bit si avrebbero circa quattro miliardi di slot, anche salvando solo un byte per ogni slot avremmo 4GB di memoria occupati!
- Possiamo riformulare l'idea in modo che possa funzionare?

TABELLE HASH

TABELLE HASH

- Invece di utilizzare direttamente le chiavi come indici, usiamo una funzione (detta *funzione di hash*) che, data una chiave, ci dice dove trovarla all'interno di una tabella

TABELLE HASH

- Invece di utilizzare direttamente le chiavi come indici, usiamo una funzione (detta *funzione di hash*) che, data una chiave, ci dice dove trovarla all'interno di una tabella
- Questo ci permette di definire quelle che sono chiamate le *tabelle hash:*

TABELLE HASH

- Invece di utilizzare direttamente le chiavi come indici, usiamo una funzione (detta *funzione di hash*) che, data una chiave, ci dice dove trovarla all'interno di una tabella
- Questo ci permette di definire quelle che sono chiamate le *tabelle hash:*
  - Dato un array, una chiave $k \in \mathcal{U}$ (universo delle chiavi), ed una funzione di hash h, la posizione in cui inserire/trovare k nell'array è $h(k) \in \{0,\ldots,m-1\}$.

TABELLE HASH

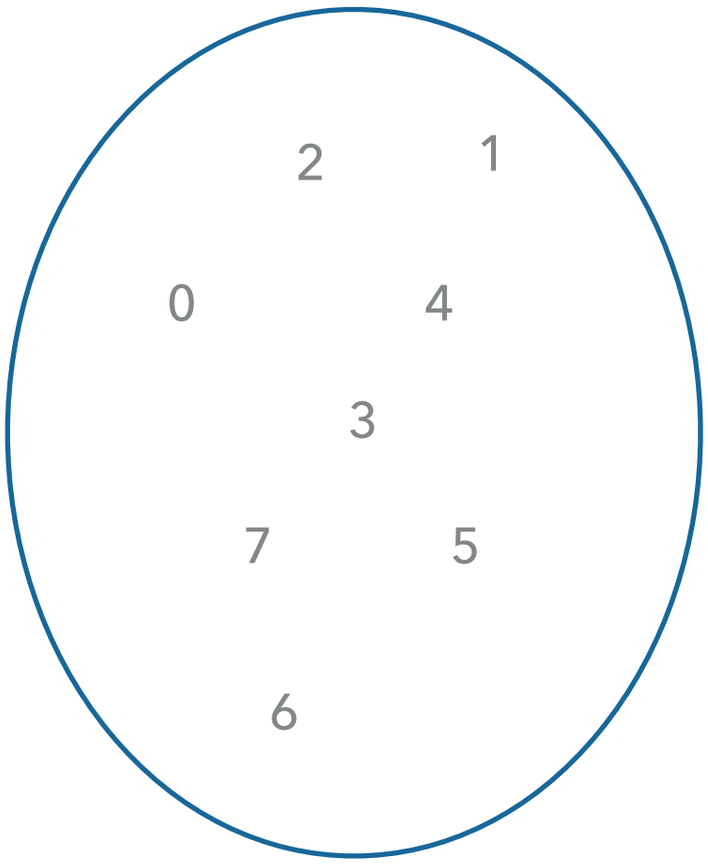
- Invece di utilizzare direttamente le chiavi come indici, usiamo una funzione (detta *funzione di hash*) che, data una chiave, ci dice dove trovarla all'interno di una tabella

- Questo ci permette di definire quelle che sono chiamate le *tabelle hash:*

  - Dato un array, una chiave $k \in \mathcal{U}$ (universo delle chiavi), ed una funzione di hash h, la posizione in cui inserire/trovare k nell'array è $h(k) \in \{0,\ldots,m-1\}$.

  - Il condominio di h può essere molto ridotto!

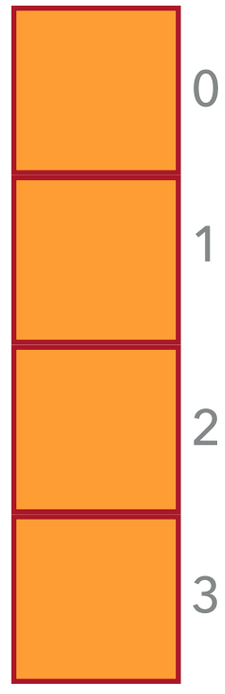
UNA PRIMA TABELLA HASH



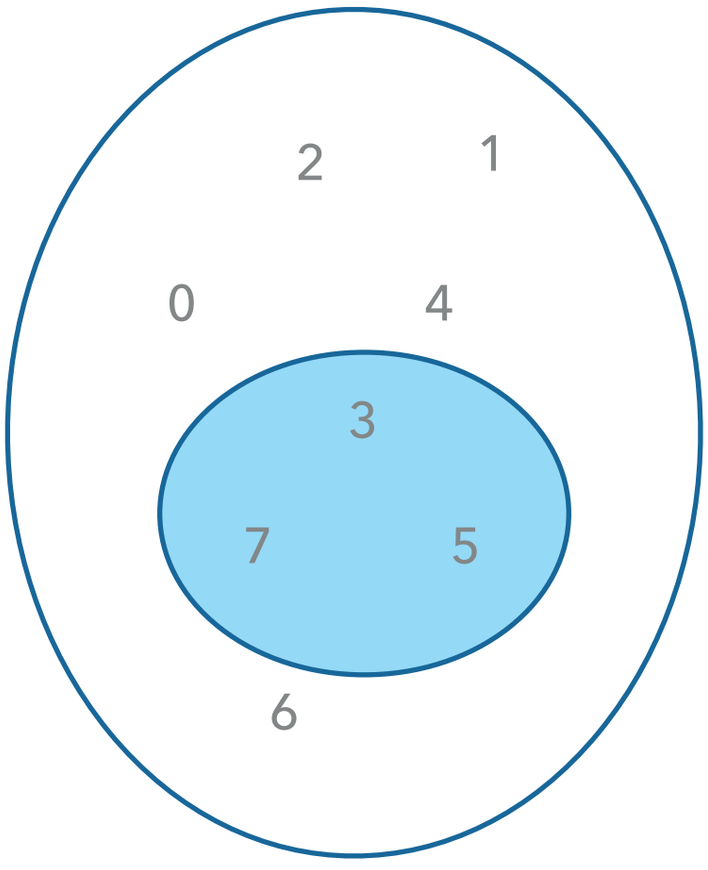
Universo di tutte
le chiavi possibili

HASH FUNCTION

$h(x) = x \mod 4$



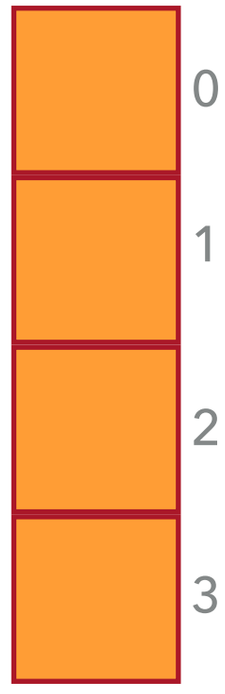
UNA PRIMA TABELLA HASH



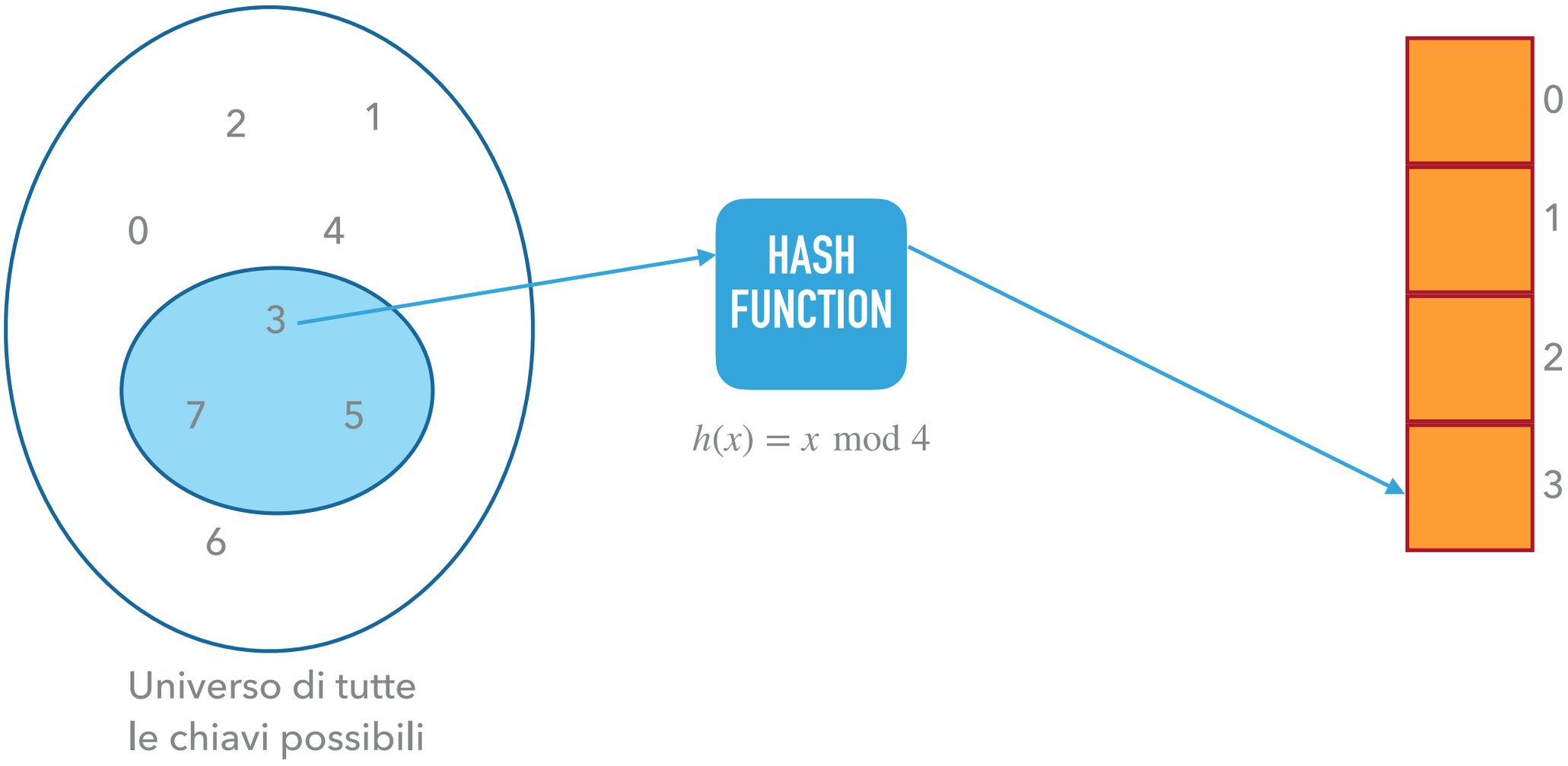
Universo di tutte
le chiavi possibili

HASH FUNCTION

$h(x) = x \mod 4$

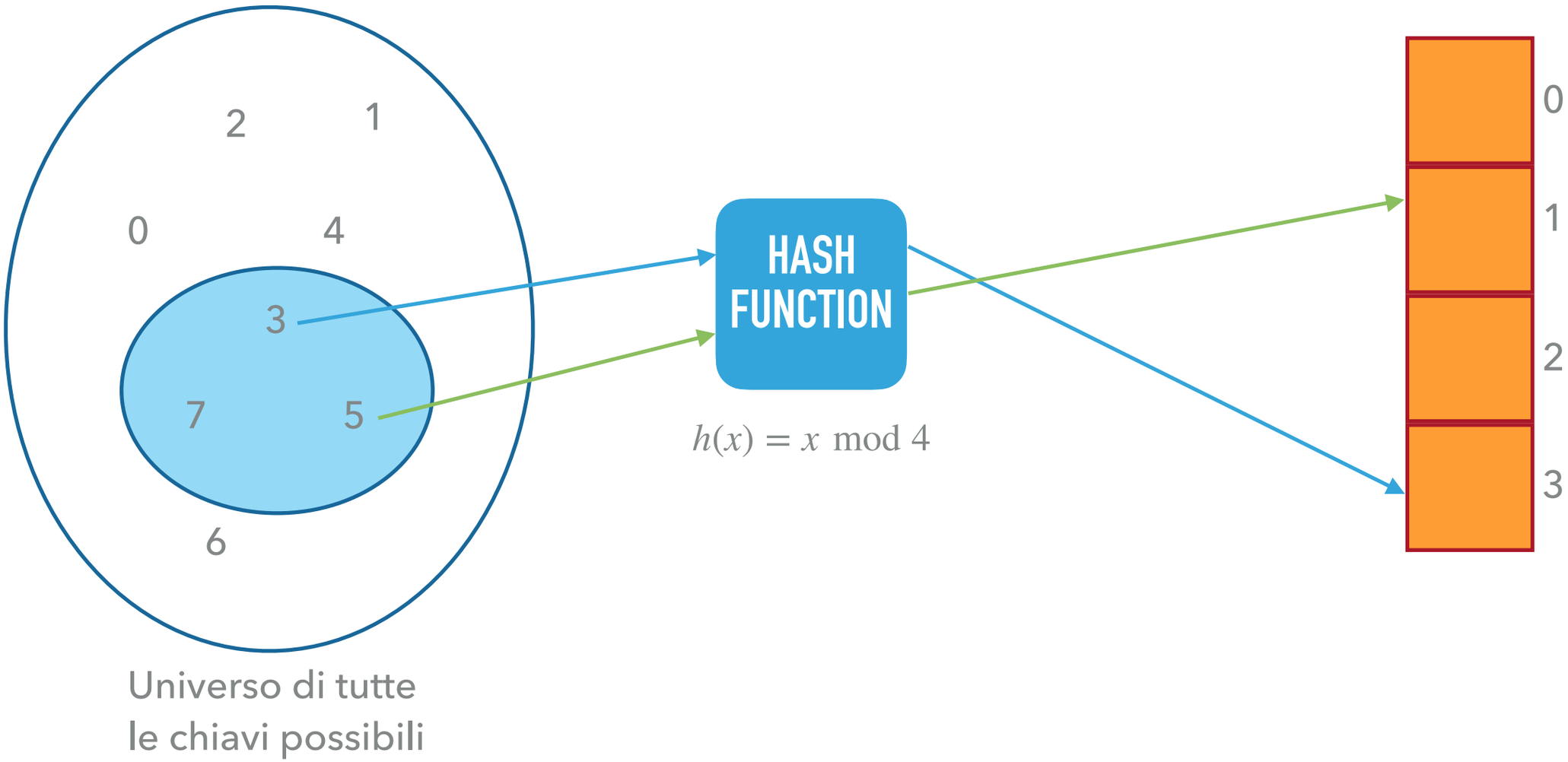


UNA PRIMA TABELLA HASH

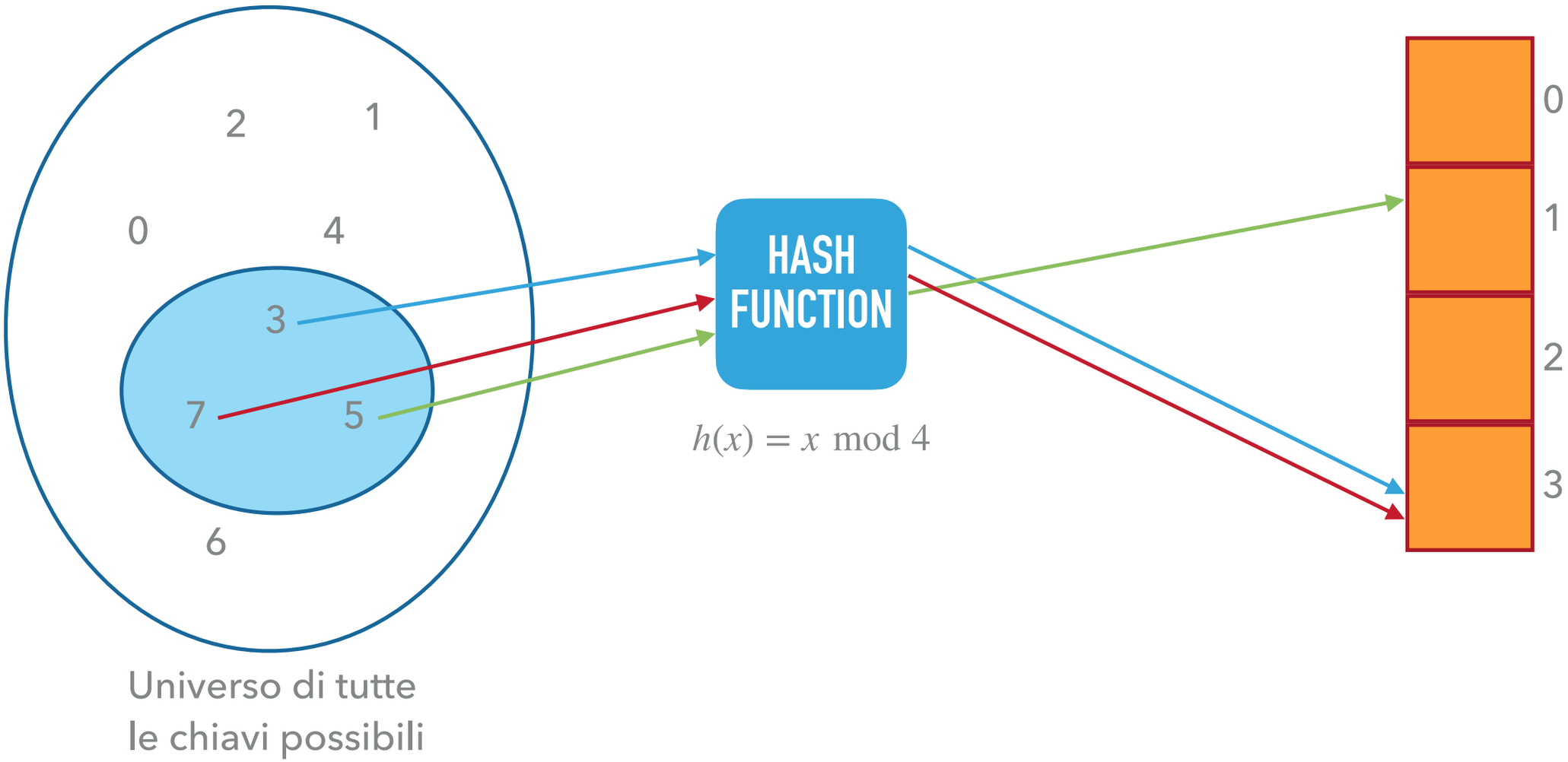


Universo di tutte
le chiavi possibili

UNA PRIMA TABELLA HASH



UNA PRIMA TABELLA HASH



Universo di tutte
le chiavi possibili

TABELLE HASH

TABELLE HASH

- Finché non abbiamo due chiavi distinte con lo stesso hash (i.e., $k_1 \neq k_2$ ma $h(k_1) = h(k_2)$) tutte le operazioni continuano ad essere effettuabili in tempo costante (assumendo che h richieda tempo costante)

TABELLE HASH

- Finché non abbiamo due chiavi distinte con lo stesso hash (i.e., $k_1 \neq k_2$ ma $h(k_1) = h(k_2)$) tutte le operazioni continuano ad essere effettuabili in tempo costante (assumendo che h richieda tempo costante)
- Però dobbiamo gestire questo caso (le **collisioni**).
- A seconda di come decidiamo di gestirlo abbiamo diverse varianti di tabelle hash.

GESTIRE LE COLLISIONI

GESTIRE LE COLLISIONI

- Possiamo tenere per ogni slot una lista concatenata di valori che hanno lo stesso hash: **chaining** o "**hash con concatenazione**"

GESTIRE LE COLLISIONI

- Possiamo tenere per ogni slot una lista concatenata di valori che hanno lo stesso hash: **chaining** o "**hash con concatenazione**"
- Possiamo invece cercare un altro posto libero nella tabella: **open addressing** o **indirizzamento aperto**. Ne esistono diverse varianti, tra cui:
  - Ispezione lineare o quadratica
  - Doppio hashing

CHAINING

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Abbiamo un array di m elementi, ognuno una lista concatenata (di solito doppia)

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Abbiamo un array di m elementi, ognuno una lista concatenata (di solito doppia)
- L'inserimento di un elemento x di chiave k si riconduce a un inserimento in testa alla lista di indice $h(k)$

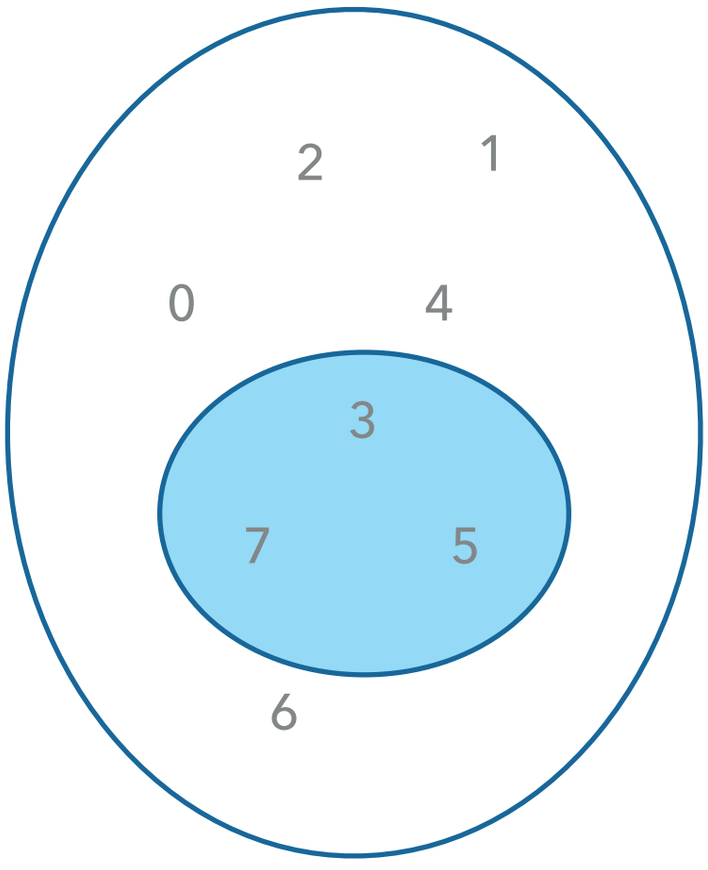
CHAINING / CONCATENAZIONE

- Abbiamo un array di m elementi, ognuno una lista concatenata (di solito doppia)
- L'inserimento di un elemento x di chiave k si riconduce a un inserimento in testa alla lista di indice $h(k)$
- La rimozione di un elemento x di chiave k si riconduce a una rimozione dalla lista di indice $h(k)$

CHAINING / CONCATENAZIONE

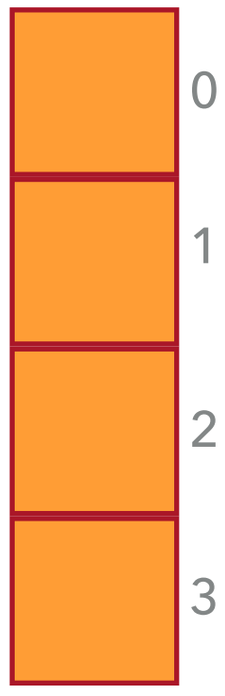
- Abbiamo un array di m elementi, ognuno una lista concatenata (di solito doppia)
- L'inserimento di un elemento x di chiave k si riconduce a un inserimento in testa alla lista di indice $h(k)$
- La rimozione di un elemento x di chiave k si riconduce a una rimozione dalla lista di indice $h(k)$
- La ricerca data una chiave k si riconduce alla ricerca di k nella lista di indice $h(k)$

HASH CON CHAINING

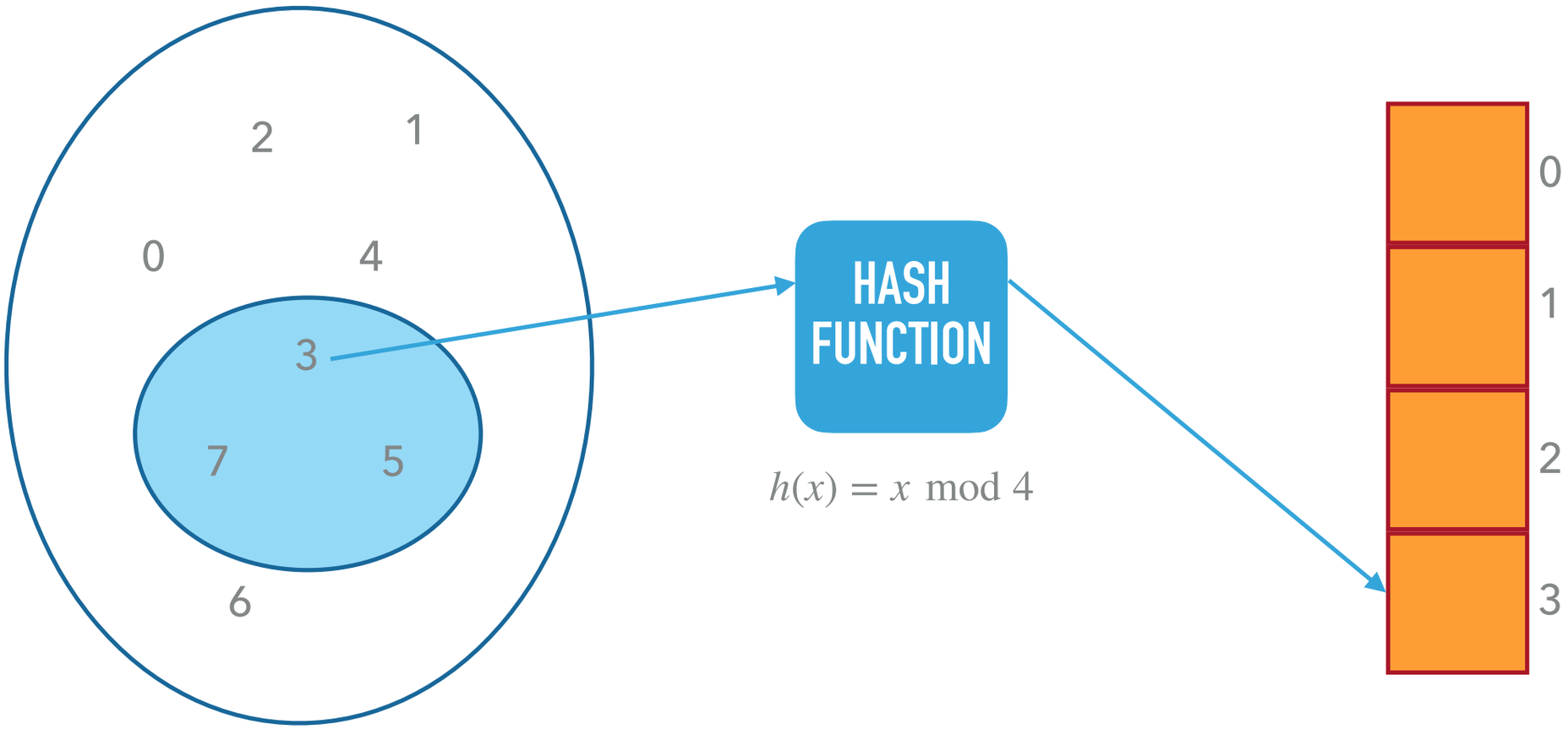


HASH FUNCTION

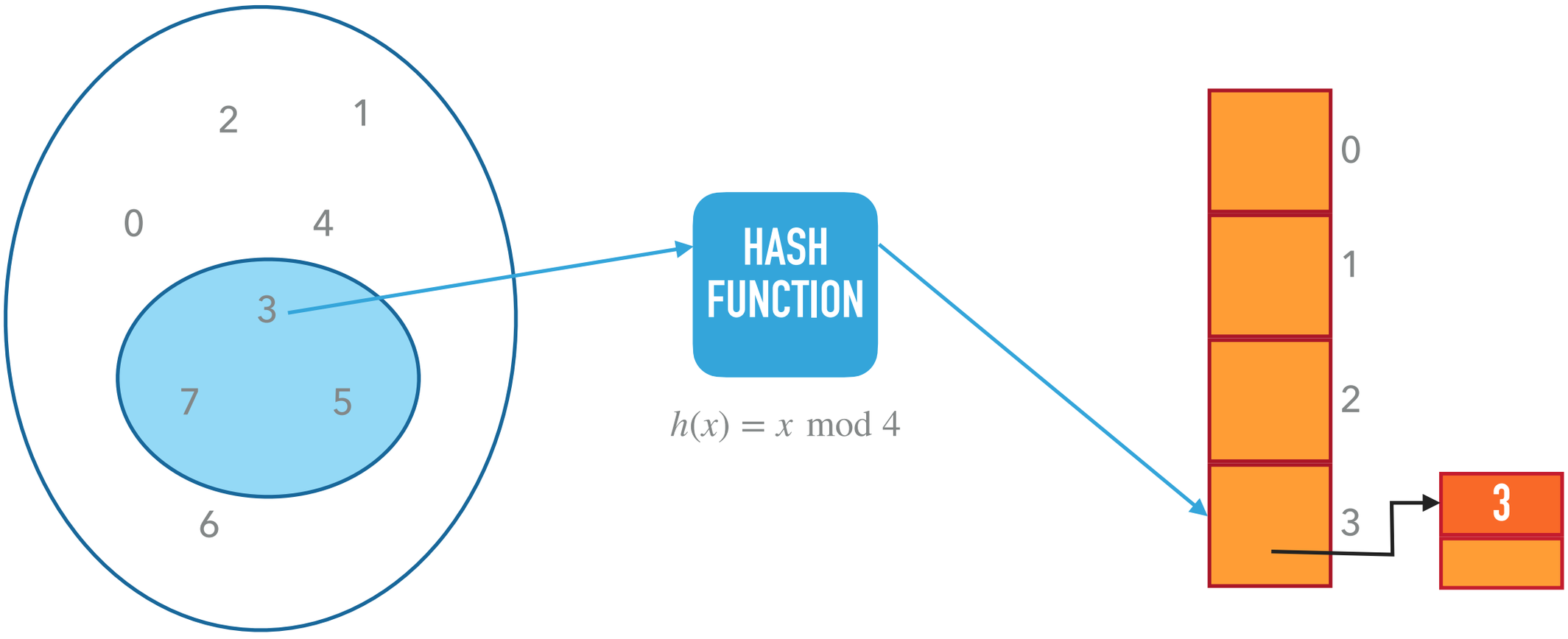
$h(x) = x \mod 4$



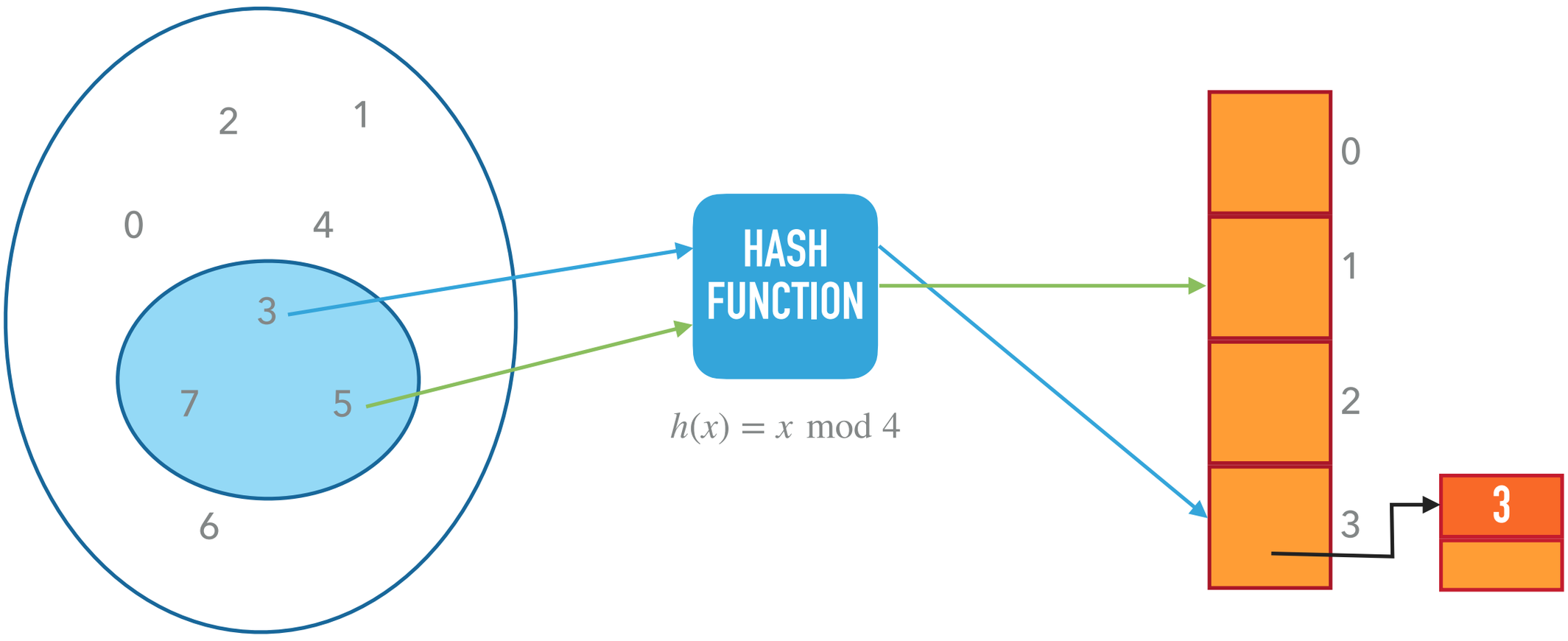
HASH CON CHAINING



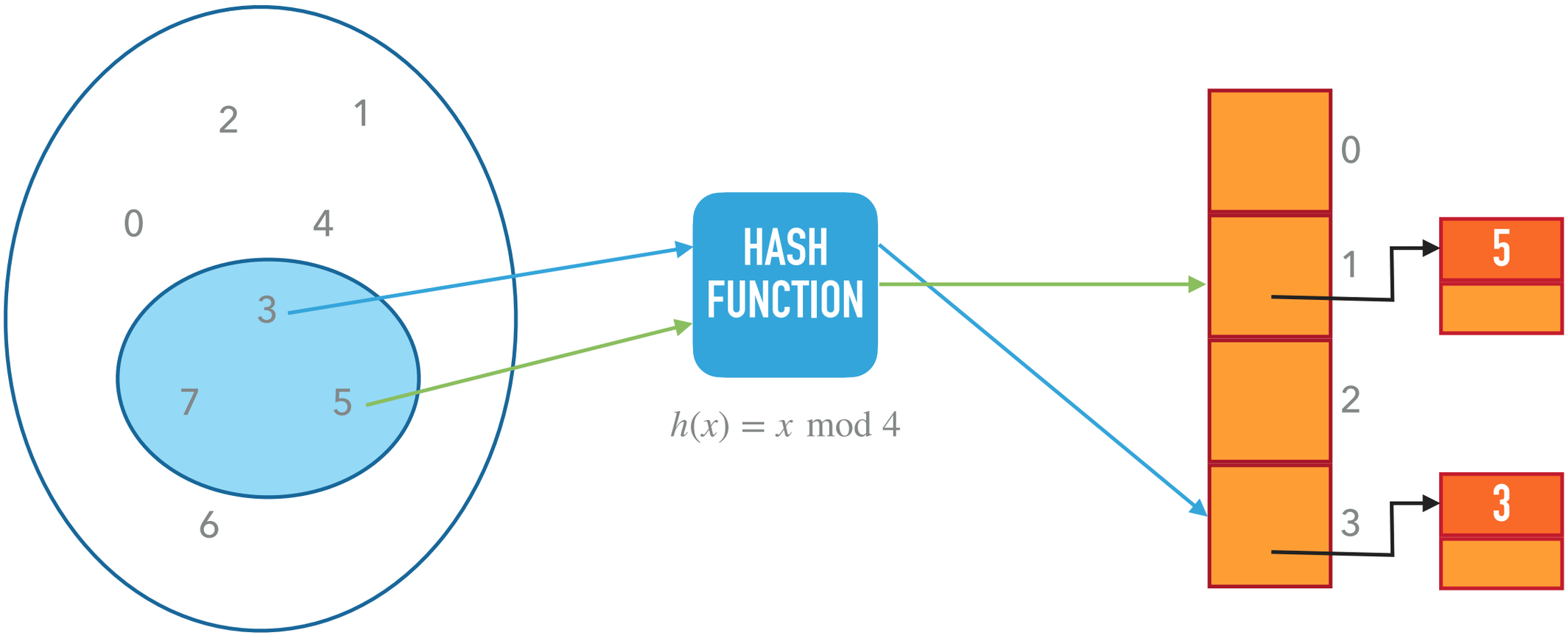
HASH CON CHAINING



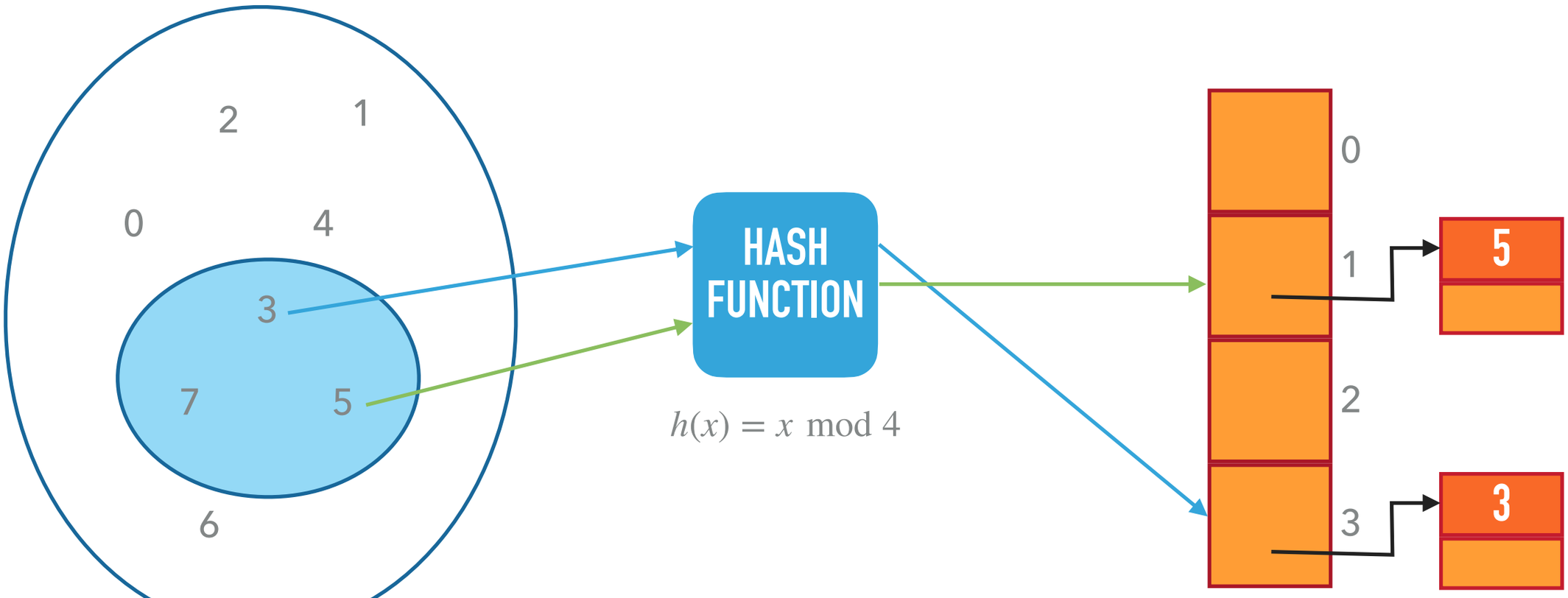
HASH CON CHAINING



HASH CON CHAINING

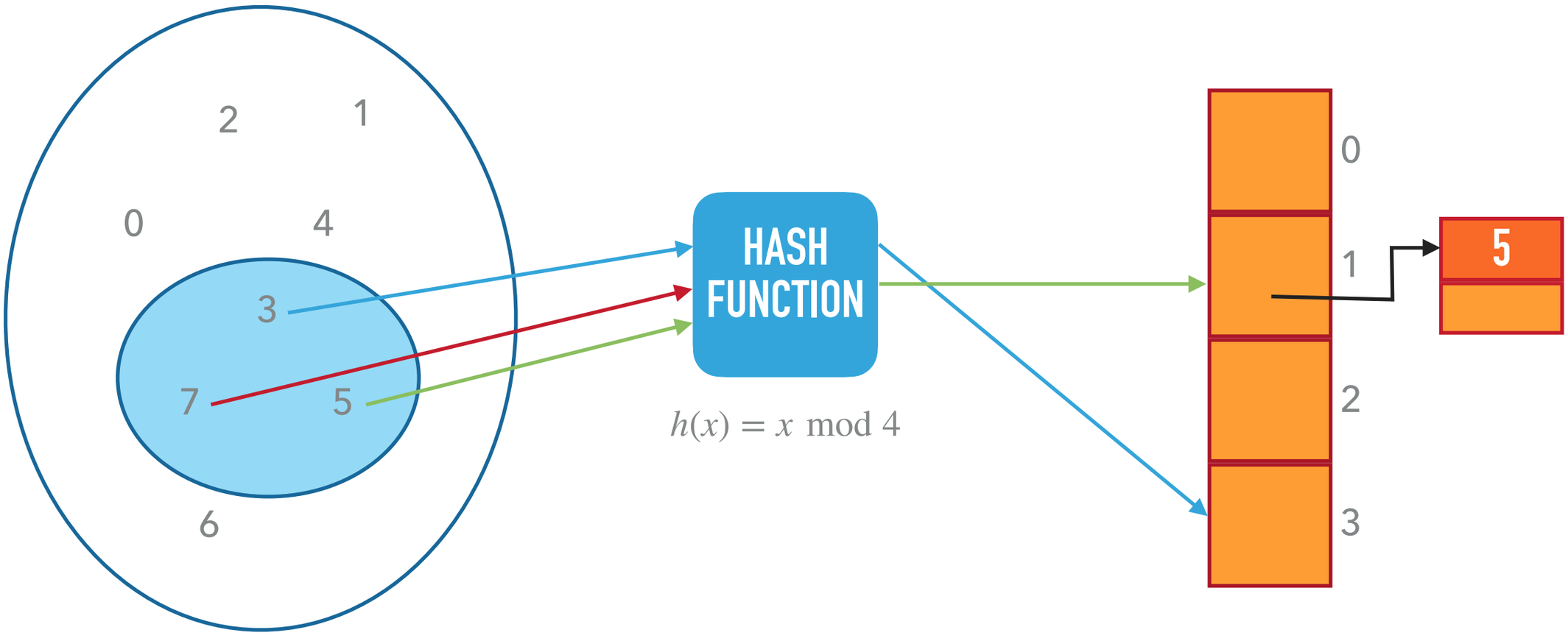


HASH CON CHAINING

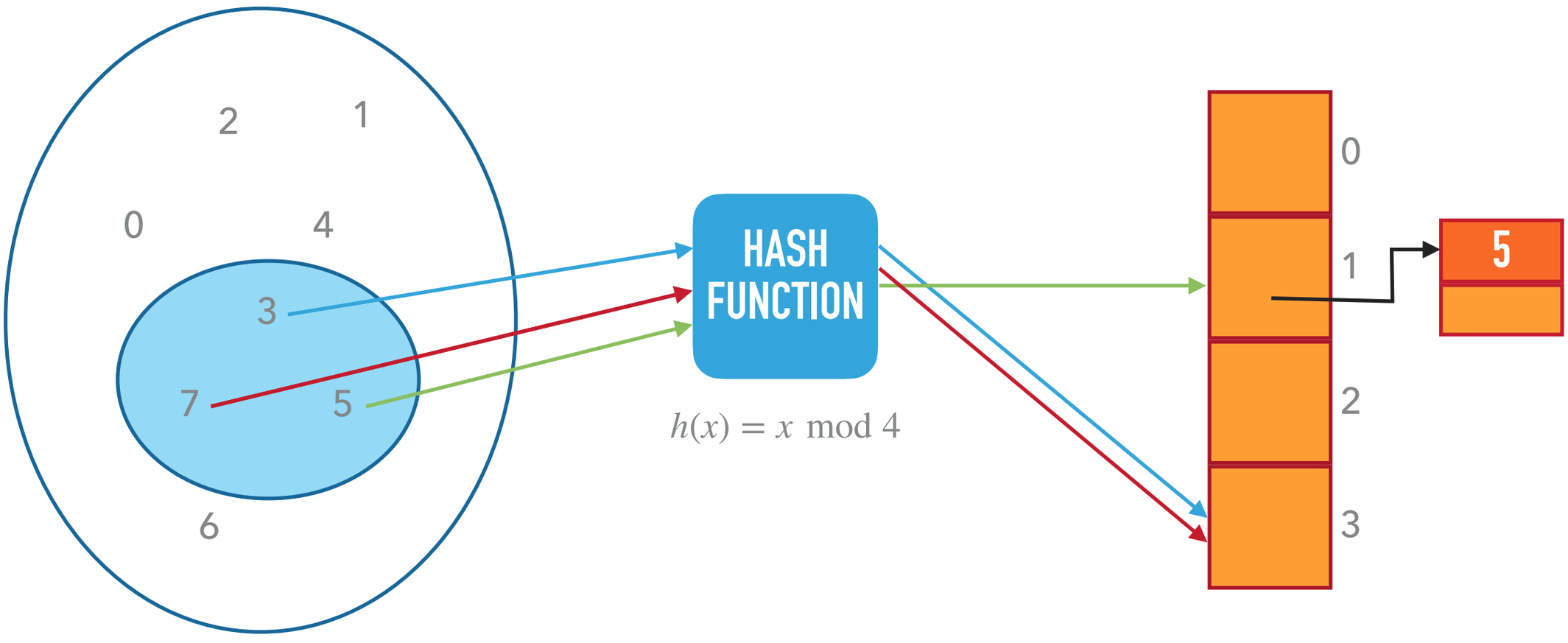


Il prossimo inserimento provocherà una collisione. Come lo gestiamo?

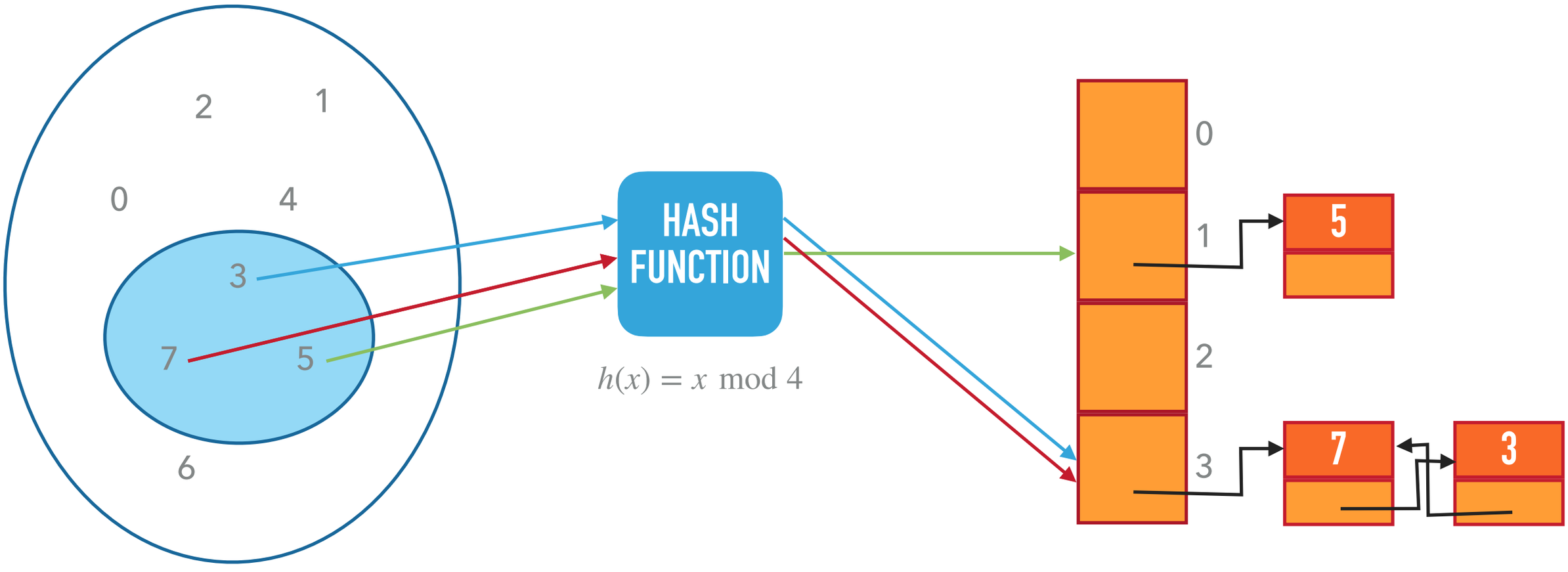
HASH CON CHAINING



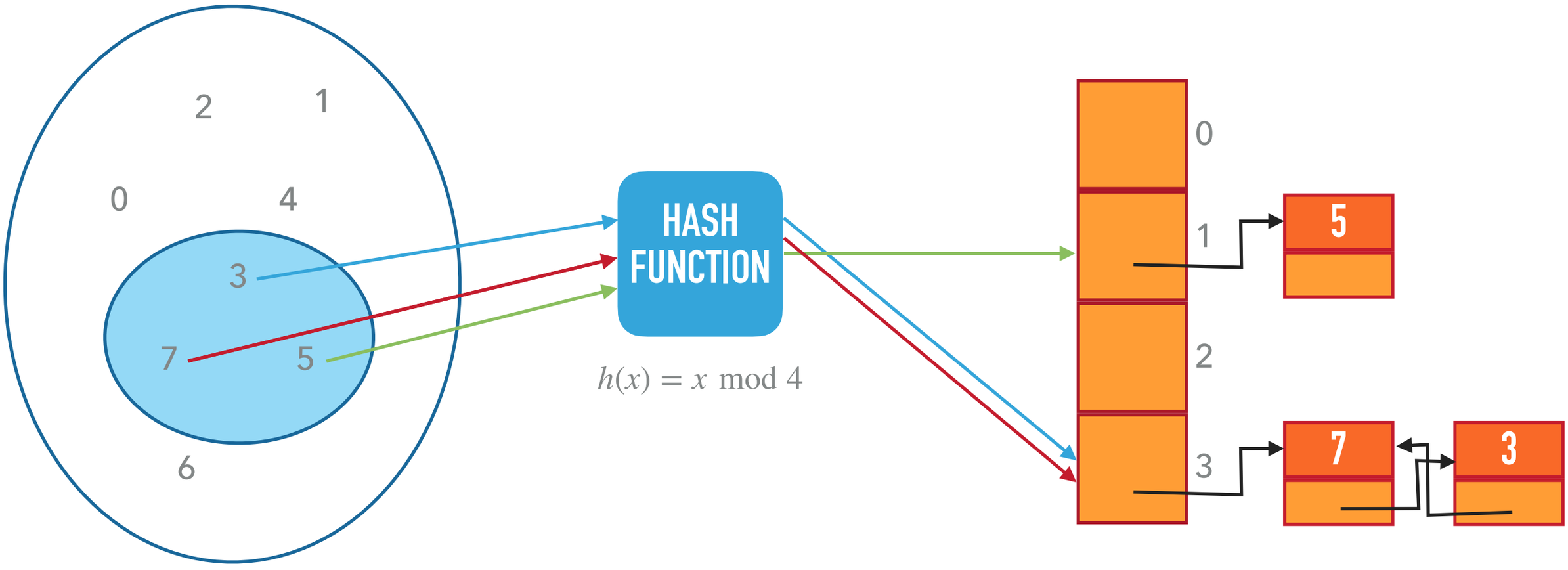
HASH CON CHAINING



HASH CON CHAINING



HASH CON CHAINING



Effettuiamo l'inserimento in testa per avere sempre inserimenti in $O(1)$.
Usiamo una lista concatenata doppia per avere rimozioni in $O(1)$.

CHAINING / CONCATENAZIONE

Inserimento

Parametri: x (l'oggetto da inserire) e la tabella T

inserisci x in testa a T[h(x.key)]

Ricerca

Parametri: k (la chiave) e la tabella T

ricerca lineare nella lista T[h(k)]

Rimozione

Parametri: x (l'oggetto da rimuovere) e la tabella T

rimuovi x da T[h(x.key)]

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Perché questo ci dovrebbe aiutare?

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Perché questo ci dovrebbe aiutare?
- Nel caso peggiore abbiamo tutti gli n elementi nella stessa lista concatenata
- Quindi, anche se inserimento e rimozione richiedono tempo $O(1)$, la ricerca richiede invece tempo $O(n)$

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Perché questo ci dovrebbe aiutare?
- Nel caso peggiore abbiamo tutti gli n elementi nella stessa lista concatenata
- Quindi, anche se inserimento e rimozione richiedono tempo $O(1)$, la ricerca richiede invece tempo $O(n)$
- L'analisi è corretta per il caso peggiore, ma possiamo ottenere qualcosa di meglio guardando il tempo medio?

TABELLE HASH: ALCUNE DEFINIZIONI

TABELLE HASH: ALCUNE DEFINIZIONI

- Come al solito, indichiamo con n il numero di elementi contenuti nella tabella
- Indichiamo con m la dimensione della tabella

TABELLE HASH: ALCUNE DEFINIZIONI

- Come al solito, indichiamo con n il numero di elementi contenuti nella tabella
- Indichiamo con m la dimensione della tabella
- $\alpha = n/m$ è il **load factor** o **fattore di carico** della tabella.

TABELLE HASH: ALCUNE DEFINIZIONI

- Come al solito, indichiamo con n il numero di elementi contenuti nella tabella
- Indichiamo con m la dimensione della tabella
- $\alpha = n/m$ è il **load factor** o **fattore di carico** della tabella.
- Il fattore di carico indica quanto "piena" è la tabella:
  - $\alpha < 1$ abbiamo più posti nella tabella che elementi inseriti
  - $\alpha > 1$ abbiamo più elementi inseriti che posti nella tabella

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Assumiamo che la funzione di hash distribuisca uniformemente le chiavi negli m slot:

  Sia K una variabile aleatoria su $\mathcal{U}$, con $p(h(K) = j) = \frac{1}{m}$

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Assumiamo che la funzione di hash distribuisca uniformemente le chiavi negli m slot:

  Sia K una variabile aleatoria su $\mathcal{U}$, con $p(h(K) = j) = \frac{1}{m}$

- Sotto queste assunzioni, mostriamo che il tempo medio per cercare un elemento in una tabella hash è $\Theta(1 + \alpha)$

CHAINING / CONCATENAZIONE

- Assumiamo che la funzione di hash distribuisca uniformemente le chiavi negli m slot:

  Sia K una variabile aleatoria su $\mathcal{U}$, con $p(h(K) = j) = \frac{1}{m}$

- Sotto queste assunzioni, mostriamo che il tempo medio per cercare un elemento in una tabella hash è $\Theta(1 + \alpha)$

- Dividiamo la dimostrazione in due parti:

  - Il caso in cui l'elemento cercato non sia nella tabella

  - Il caso in cui l'elemento cercato sia nella tabella

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se l'elemento cercato non è presente, la chiave k con cui lo cerchiamo ha uguale probabilità di finire in uno qualsiasi degli m slot.

Quindi il tempo atteso per scoprire che la chiave non è presente è dato dalla lunghezza attesa della lista di indice $h(k)$.

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se l'elemento cercato non è presente, la chiave k con cui lo cerchiamo ha uguale probabilità di finire in uno qualsiasi degli m slot.

Quindi il tempo atteso per scoprire che la chiave non è presente è dato dalla lunghezza attesa della lista di indice $h(k)$.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi inseriti di chiavi $k_1, \ldots, k_n$ Indichiamo con $Z_{i,j} = 1$ il caso $h(k_i) = j$ e $Z_{i,j} = 0$ altrimenti

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se l'elemento cercato non è presente, la chiave k con cui lo cerchiamo ha uguale probabilità di finire in uno qualsiasi degli m slot.

Quindi il tempo atteso per scoprire che la chiave non è presente è dato dalla lunghezza attesa della lista di indice $h(k)$.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi inseriti di chiavi $k_1, \ldots, k_n$ Indichiamo con $Z_{i,j} = 1$ il caso $h(k_i) = j$ e $Z_{i,j} = 0$ altrimenti

Lunghezza attesa di una lista: $E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_{ij}] = \frac{n}{m} = \alpha$ (fattore di carico)

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se l'elemento cercato non è presente, la chiave k con cui lo cerchiamo ha uguale probabilità di finire in uno qualsiasi degli m slot.

Quindi il tempo atteso per scoprire che la chiave non è presente è dato dalla lunghezza attesa della lista di indice $h(k)$.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi inseriti di chiavi $k_1, \ldots, k_n$ Indichiamo con $Z_{i,j} = 1$ il caso $h(k_i) = j$ e $Z_{i,j} = 0$ altrimenti

Lunghezza attesa di una lista: $E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_{ij}] = \frac{n}{m} = \alpha$ (fattore di carico)

Quindi il tempo atteso richiesto è un numero costante di passi più il tempo di cercare una lista di lunghezza α: $\Theta(1 + \alpha)$

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se assumiamo che l'elemento x di chiave k sia presente nella lista, allora è egualmente probabile che sia uno qualsiasi degli n elementi presenti nella lista.

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se assumiamo che l'elemento x di chiave k sia presente nella lista, allora è egualmente probabile che sia uno qualsiasi degli n elementi presenti nella lista.

Gli elementi sono inseriti in testa alla lista, quindi il tempo richiesto per trovare x dipende da quanti elementi con lo stesso hash sono stati inseriti dopo di lui

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se assumiamo che l'elemento x di chiave k sia presente nella lista, allora è egualmente probabile che sia uno qualsiasi degli n elementi presenti nella lista.

Gli elementi sono inseriti in testa alla lista, quindi il tempo richiesto per trovare x dipende da quanti elementi con lo stesso hash sono stati inseriti dopo di lui

Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi inseriti di chiavi $k_1, \ldots, k_n$

CHAINING / CONCATENAZIONE

Se assumiamo che l'elemento x di chiave k sia presente nella lista, allora è egualmente probabile che sia uno qualsiasi degli n elementi presenti nella lista.

Gli elementi sono inseriti in testa alla lista, quindi il tempo richiesto per trovare x dipende da quanti elementi con lo stesso hash sono stati inseriti dopo di lui

Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi inseriti di chiavi $k_1, \ldots, k_n$

Indichiamo con $X_{i,j} = 1$ il caso $h(k_i) = h(k_j)$ e $X_{i,j} = 0$ altrimenti

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Il numero di elementi da visitare prima di trovare x_i sarà quindi:

$$1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

ovvero uno più tutti gli elementi inseriti dopo di lui

CHAINING / CONCATENAZIONE

Il numero di elementi da visitare prima di trovare x_i sarà quindi:

$$1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

ovvero uno più tutti gli elementi inseriti dopo di lui

Dato che x potrebbe essere uno qualsiasi degli x_i, facciamo la media su tutte le possibili posizioni in cui potrebbe essere x, ottenendo il seguente tempo atteso:

CHAINING / CONCATENAZIONE

Il numero di elementi da visitare prima di trovare x_i sarà quindi:

$$1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}$$

ovvero uno più tutti gli elementi inseriti dopo di lui

Dato che x potrebbe essere uno qualsiasi degli x_i, facciamo la media su tutte le possibili posizioni in cui potrebbe essere x, ottenendo il seguente tempo atteso:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{i,j}\right)\right]$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Possiamo portare dentro il valore atteso per linearità:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{i,j}]\right)$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

Possiamo portare dentro il valore atteso per linearità:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{i,j}]\right)$$

Dato che assumiamo che la funzione di hash distribuisca in modo uniforme le chiavi, abbiamo che la probabilità che $X_{i,j}$ sia 1 è $\frac{1}{m}$, quindi $E[X_{i,j}] = \frac{1}{m}$

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Otteniamo quindi

CHAINING / CONCATENAZIONE

Otteniamo quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=i+1}^{n}1\right)$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

Otteniamo quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=i+1}^{n}1\right)$$

$$=1+\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(n-i)=1+\frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n}n-\sum_{i=1}^{n}i\right)$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

Otteniamo quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=i+1}^{n}1\right)$$

$$=1+\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(n-i)=1+\frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n}n-\sum_{i=1}^{n}i\right)$$

$$=1+\frac{1}{nm}\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right)=1+\frac{n}{2m}-\frac{1}{2m}$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE

Sostituiamo quindi $\alpha = n/m$ ovunque ottenendo

$$1 + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} = \Theta(1 + \alpha)$$

CHAINING / CONCATENAZIONE

Sostituiamo quindi $\alpha = n/m$ ovunque ottenendo

$$1 + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} = \Theta(1 + \alpha)$$

Sommato al tempo di calcolo per la funzione di hash (che è costante), otteniamo $\Theta(1 + \alpha)$.

CHAINING / CONCATENAZIONE

Sostituiamo quindi $\alpha = n/m$ ovunque ottenendo

$$1 + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} = \Theta(1 + \alpha)$$

Sommato al tempo di calcolo per la funzione di hash (che è costante), otteniamo $\Theta(1 + \alpha)$.

Questo mostra che finché $n = O(m)$, abbiamo $\alpha = \frac{O(m)}{m} = O(1)$ e quindi il tempo medio per la ricerca è $O(1)$.

CHAINING / CONCATENAZIONE: DISCUSSIONE

CHAINING / CONCATENAZIONE: DISCUSSIONE

- Questi risultati valgono sotto le assunzioni di avere un "buona" funzione di hash che distribuisce in modo uniforme le chiavi

CHAINING / CONCATENAZIONE: DISCUSSIONE

- Questi risultati valgono sotto le assunzioni di avere un "buona" funzione di hash che distribuisce in modo uniforme le chiavi
- Serve inoltre che $n = O(m)$, quindi se la tabella su riempie troppo servirà sostituirla con una più grande (e.g., raddoppiando il numero di slot) e reinserire tutti i valori contenuti nella tabella vecchia.

FUNZIONI DI HASH

FUNZIONI DI HASH

- Fino ad ora non abbiamo detto quali funzioni di hash sono considerate buone.

FUNZIONI DI HASH

- Fino ad ora non abbiamo detto quali funzioni di hash sono considerate buone.
- Una buona funzione di hash dovrebbe rispettare la proprietà di distribuire le chiavi uniformemente negli m slot a disposizione…

FUNZIONI DI HASH

- Fino ad ora non abbiamo detto quali funzioni di hash sono considerate buone.
- Una buona funzione di hash dovrebbe rispettare la proprietà di distribuire le chiavi uniformemente negli m slot a disposizione…
- … ma solitamente non sappiamo con che distribuzione di probabilità sono prese le chiavi che inseriamo

FUNZIONI DI HASH

FUNZIONI DI HASH

- Se abbiamo buona conoscenza della distribuzione con cui sono ottenute le chiavi possiamo costruire una funzione di hash ad-hoc

FUNZIONI DI HASH

- Se abbiamo buona conoscenza della distribuzione con cui sono ottenute le chiavi possiamo costruire una funzione di hash ad-hoc
- In generale utilizziamo alcune euristiche che funzionano bene in pratica e in cui vediamo le chiavi come numeri naturali:
  - Il metodo della divisione
  - Il metodo della moltiplicazione

METODO DELLA DIVISIONE

- Data una tabella di dimensione m, per ogni chiave definiamo $h(k)$ come $h(k) = k \bmod m$
- Generalmente un metodo di hashing rapido
- Vogliamo però evitare alcuni valori di m che possono essere problematici.
- Vediamo alcuni di questi casi

METODO DELLA DIVISIONE

METODO DELLA DIVISIONE

- Se $m = 2^p$ per qualche $p \in \mathbb{N}$, il valore di $h(x)$ dipende solo dai p bit meno significativi di x

METODO DELLA DIVISIONE

- Se $m = 2^p$ per qualche $p \in \mathbb{N}$, il valore di $h(x)$ dipende solo dai p bit meno significativi di x
- Si vede bene in base 10: se $m = 100$ abbiamo che $h(x)$ dipende solo dalle ultime due cifre di x, quindi 8298, 43298, 198 hanno tutti lo stesso hash

METODO DELLA DIVISIONE

- Se $m = 2^p$ per qualche $p \in \mathbb{N}$, il valore di $h(x)$ dipende solo dai p bit meno significativi di x
- Si vede bene in base 10: se $m = 100$ abbiamo che $h(x)$ dipende solo dalle ultime due cifre di x, quindi 8298, 43298, 198 hanno tutti lo stesso hash
- Generalmente buone scelte per m sono primi vicini a potenze di 2. Questo permette di avere un valore di hash che dipende da tutti i bit della chiave

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Creazione di una funzione di hash in due passi

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Creazione di una funzione di hash in due passi
- Si sceglie una costante A con $0 < A < 1$

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Creazione di una funzione di hash in due passi
- Si sceglie una costante A con $0 < A < 1$
- Si moltiplica la chiave x per A e si prende la parte frazionaria: $Ax - \lfloor Ax \rfloor$

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Creazione di una funzione di hash in due passi
- Si sceglie una costante A con $0 < A < 1$
- Si moltiplica la chiave x per A e si prende la parte frazionaria: $Ax - \lfloor Ax \rfloor$
- La parte frazionaria si moltiplica per m e del risultato si prende la parte intera:
  $h(x) = \lfloor m(Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor$

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Il vantaggio di questo metodo è che il valore di m non è critico, quindi possiamo scegliere una potenza di 2.

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Il vantaggio di questo metodo è che il valore di m non è critico, quindi possiamo scegliere una potenza di 2.
- La parte critica è invece il valore di A, ma questo non deve cambiare se dobbiamo ingrandire la tabella.

METODO DELLA MOLTIPLICAZIONE

- Il vantaggio di questo metodo è che il valore di m non è critico, quindi possiamo scegliere una potenza di 2.
- La parte critica è invece il valore di A, ma questo non deve cambiare se dobbiamo ingrandire la tabella.
- Knuth suggerisce un valore $A = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.6180339887$