Esercizio 1. *Determinare se converge la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{3n}{n}^{-1}$$

Soluzione. *Applicando il criterio del rapporto si trova:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{2n! \cdot n!} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to \frac{4}{27} < 1$$

quindi la serie converge.

Esercizio 2. *Determinare se converge la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$$

Soluzione. *Applicando il criterio del rapporto si trova:*

$$\frac{(2n+2)!6^{n+1}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(2n)!6^n} = \frac{6(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 0$$

quindi la serie converge.

Esercizio 3. *Determinare se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$$

Soluzione. *Osservo che:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$

Verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz:

$$a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n < 1 \qquad \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= e \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

quindi la serie converge.

Esercizio 4. *Determinare se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$$

Soluzione.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} = 100\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$$
quindi la serie converge per il criterio di Leibniz essendo $\frac{1}{2n+3}$ *decrescente.*

Esercizio 5. *Determinare se converge la serie:*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-10\log(2n)}$$

Soluzione. *Osserviamo che:*
$$\frac{d}{dx}\left[x-10\log(2x)\right] = 1-\frac{10}{x} > 0$$
definitivamente per $x > 10$, *inoltre* $f(x) = x - 10\log(2x) \to \infty$ *se* $x \to +\infty$. *In particolare:*
$$f(128) = 128 - 10\ln(256) = 128 - 80\ln(2) > 128 - 80 > 0$$

Quindi:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-10\log(2n)} = \sum_{n=1}^{127}(-1)^n \frac{1}{n-10\log(2n)} + \sum_{n=128}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-10\log(2n)}$$
Possiamo applicare il criterio di Leibniz alla serie
$$\sum_{n=128}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-10\log(2n)}$$
ed affermare che la serie in questione è convergente.

Esercizio 6. *Determinare per quali* $a > 0$ *converge la serie*
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$$

Soluzione. *Applicando il criterio di condensazione per serie una prima volta troviamo che:*
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$$
converge se e solo se converge la seguente serie:
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n\ln(2^n)(\ln(\ln(2^n)))^a} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(2)(\ln(n\ln(2)))^a} = \frac{1}{\ln(2)}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n\ln(2)))^a}$$
$$= \frac{1}{\ln(2)}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n)+\ln(\ln(2)))^a}$$

Una seconda applicazione del criterio di condensazione per serie dà:

$$\frac{1}{\ln(2)}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n)+\ln(\ln(2)))^a}$$

converge se e solo se

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n(\ln(2^n)+\ln(\ln(2)))^a}$$

converge. Abbiamo che:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n(\ln(2^n)+\ln(\ln(2)))^a}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n\ln(2)+\ln(\ln(2)))^a}$$

quindi la serie converge per $a>1$ per confronto con la serie armonica generalizzata.

Esercizio 7. *Determinare per quali $a>0$ converge la seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cosh(n)}{a^n}$$

Soluzione. *La serie proposta può essere posta nella seguente forma:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cosh(n)}{a^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2a^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n}{a^n}(1+e^{-2n})$$

Applicando il criterio della radice otteniamo:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{a^n}(1+e^{-2n})\right|}=\frac{e}{a}\sqrt[n]{(1+e^{-2n})}\to\frac{e}{a}\ \textit{se}\ n\to+\infty$$

La serie pertanto converge per $a>e$ e diverge per $a<e$, Per $a=e$ la serie diverge dato che il termine n-esimo non è infinitesimo.

Esercizio 8.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n}$$

Soluzione. *Osservo che per il teorema del confronto la serie converge assolutamente dato che:*

$$0\le\frac{|\cos(n)|}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$$

Possiamo anche calcolarne esplicitamente la somma scrivendo la serie come una serie a termini complessi. Ricordiamo che per ogni $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^{ix}&=\cos(x)+i\sin(x)\\e^{-ix}&=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos(x)-i\sin(x)\end{aligned}$$

e da questa sommando membro a membro si trova:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos(x)$$

Pertanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}+e^{-in}}{2^n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-in}}{2^n}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{i}}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-i}}{2}\right)^n\right].$$

Ciascuna delle due serie converge assolutamente per il criterio della radice essendo $|e^i|=|e^{-i}|=1$. Inoltre la formula per le serie geometriche di ragione minore di 1 dà:

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{i}}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-i}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{e^i}{2}}+\frac{1}{1-\frac{e^{-i}}{2}}\right]=\frac{1}{2-e^i}+\frac{1}{2-e^{-i}}=\frac{4-(e^i+e^{-i})}{5-2(e^i+e^{-i})}$$
$$=\frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}.$$

Esercizio 9. *Studiare al variare di $x>0$ la convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^{nx}$$

Soluzione. *Si ha:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^{nx}=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{nx\ln x}$$

Applicando il criterio della radice troviamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(e^{nx\ln x}\right)\right|}=e^{x\ln x}$$

Se $|e^{x\ln x}|<1$, cioè $x\ln x<0$ e pertanto $x<1$ la serie converge, se $x>1$, diverge. Se $x=1$ la serie diverge dato che si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty}1$.

Esercizio 10. *Studiare al variare di $x>0$ la convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

Soluzione. *Se $x=0$ la serie diverge dato che essa si riduce a:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}1$$

Se $x\neq 0$ si ha che:

$$\frac{1}{1+n^2x^2}<\frac{1}{n^2x^2}$$

pertanto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x^2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

e pertanto per $x\neq 0$ la serie converge.

Esercizio 11. *Studiare al variare di $a > 0$ la convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^{\ln(n)}}{a^n}$$

Soluzione.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)}}{e^{n\ln(a)}} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)-n\ln(a)}$$

Se $a \leq 1$ il termine n-esimo non tende a 0. Se $a > 1$ osserviamo che applicando il criterio della radice troviamo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|e^{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)-n\ln(a)}\right|} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)}{n}-\ln(a)}$$

Essendo:

$$\frac{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)}{n} = \frac{\ln(\ln(n))}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ se } n \to +\infty.$$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(\ln(n))\cdot\ln(n)}{n}-\ln(a)} = \frac{1}{a}$$

e quindi la serie converge se $a > 1$. Se $a = 1$ il termine n-esimo non è infinitesimo.