2 Dicembre

2 dicembre

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con} \quad \text{grado } P < \text{grado } Q$$

vogliamo la decomposizione di Hermite.

$$R(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$x^3-3x^2+2\cancel{x} = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2)$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Esiste una scelta di costanti, unica, di costanti A, B, C t.c.

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

A cosa serve. Serve ad esempio a calcolare le primitive

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right] dx$$

$$= A\int \frac{1}{x}\,dx + B\int \frac{1}{x-1}\,dx + C\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= A \lg|x| + B \lg|x-1| + C \lg|x-2| + k$$

Trovare A, B, C

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad \forall x \neq 0,1,2 \quad (1)$$

Per trovare A moltiplichiamo per x

$$x R(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = A + x\left(\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right) \qquad \forall x \neq 0,1,2$$

$$x R(x)\Big|_{x=0} = \boxed{\frac{1}{2} = A}$$

Per trovare B moltiplichiamo (1) per $(x-1)$

$$R(x)(x-1) = \frac{1}{x(x-2)} = B + (x-1)\left(\frac{A}{x} + \frac{C}{x-2}\right)$$

$$R(x)(x-1)\Big|_{x=1} = \boxed{-1 = B}$$

$$R(x)(x-2)\Big|_{x=2} = \frac{1}{x(x-1)}\Big|_{x=2} = \boxed{\frac{1}{2} = C}$$

Notare che qui deve essere $A + B + C = 0$

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$x R(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = A + \frac{x}{x-1} B + \frac{x}{x-2} C$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A + \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to 1}B + \underbrace{\frac{x}{x-2}}_{\to 1}C\right) = A+B+C$$

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$A = R(x)\,x\,\Big|_{x=0} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$B = R(x)\,(x-1)\,\Big|_{x=1} = \frac{x^2+1}{x(x-2)}\Big|_{x=1} = -2$$

$$C = R(x)\,(x-2)\,\Big|_{x=2} = \frac{x^2+1}{x(x-1)}\Big|_{x=2} = \frac{5}{2}$$

$$A+B+C = \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 1$$

Nelle discussioni fatte sopra è essenziale che se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si abbia grado $P <$ grado Q

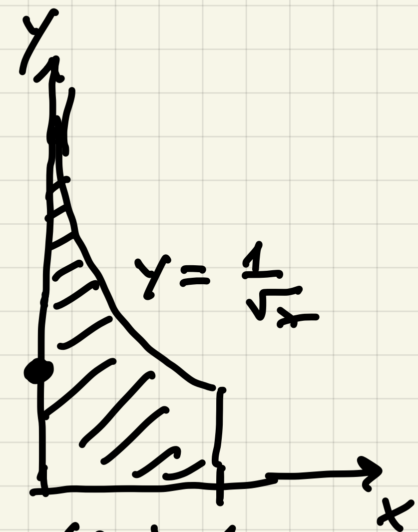
Ad es è falso che esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{R(x) = \frac{x^3+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \quad \forall x \neq 0,1,2}$$ falso

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)=0$$

Integrali impropri. E_1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad [0,+\infty)$$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (0,1]$$

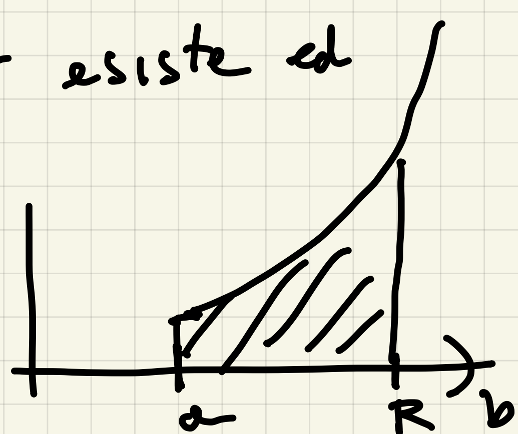
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & x\in(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \qquad (-\infty,+\infty)$$

$[a,b)$

<u>Def</u> Sia $f\in L_{loc}([a,b))$ dove $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $a<b$. Diciamo che f è integrabile in senso improprio in $[a,b)$ se

$$\lim_{R\to b^-}\int_a^R f(x)\,dx$$ esiste ed è finito

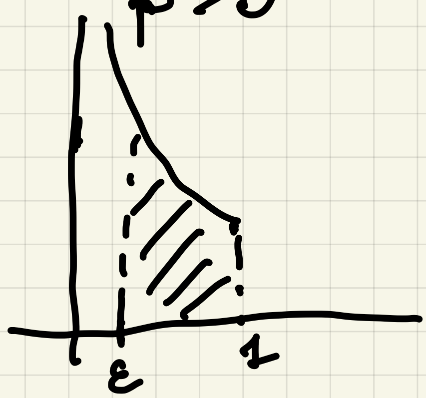


Chiamiamo il

limite l'integrale improprio di f in $[a,b)$ e lo denotiamo con $\int_a^b f(x)\,dx$

Esercizio Se f è integrabile per Darboux in $[a,b]$, con a e b in $\mathbb{R}$, allora f è integrabile in senso improprio in $[a,b)$ e il valore dei due integrali è lo stesso.

Esempio $p>0$ $\quad \frac{1}{x^p}$ in $(0,1]$



Teorema $\frac{1}{x^p} \in L((0,1])$ se e solo se $p<1$

Dim Cominciamo con $p \neq 1$.

$$\frac{1}{x^p} \in L((0,1]) \Longleftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx \in \mathbb{R}$$

$$\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1}$$

Se $p<1 \Longleftrightarrow -p+1>0 \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} = 0$

Se $p<1$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{1-p} > 0 \qquad x^{-p}\in L((0,1])$$

$$p>1 \iff -p+1<0 \implies \lim_{\varepsilon\to0^+} \varepsilon^{-p+1} = +\infty$$

Se $p>1$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \frac{1}{-p+1} - \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} =$$

$$= -\frac{1}{-p+1} + \frac{1}{p-1}\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^{-p+1}}_{=+\infty} = +\infty$$

Se $p>1$ $\qquad x^{-p}\notin L((0,1])$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

$$\iff \quad x^{-1}\notin L((0,1])$$

$$\lg 1 - \lg\varepsilon = \lg\frac{1}{\varepsilon}$$