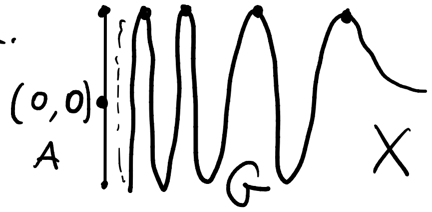
Esempio standard $G = \{ (x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

$$A = \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 , \quad X = A \cup G \subset \mathbb{R}^2$$

$G \cong]0, +\infty[$ e A sono connessi p.a.



$X = Cl_{\mathbb{R}^2}(G)$ connesso

X non connesso p.a. infatti se per assurdo

$\exists\, \gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) \in G$

$\Rightarrow T = \gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ chiuso, $0 \in T$

T compatto $t_0 = \max T < 1$ (perché $\gamma(1) \in G$)

$\rightsquigarrow \mu = \gamma| : [t_0, 1] \to X$ soddisfa $\mu^{-1}(A) = \{t_0\}$.

$(a, \sin \frac{1}{a}) = \mu(1) \Rightarrow$

$$\mu(]t_0, 1]) = \{ (x,y) \in G \mid 0 < x \leq a \}$$

infatti G meno un punto non è connesso per archi mentre $\mu(]t_0, 1])$ è connesso per archi $\Rightarrow$

$\exists\, (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]t_0, 1]$ t.c. $\mu(t_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1 \right)$ e

$\lim_{n \to \infty} t_n = t_0$, impossibile perché

$$\lim_{n \to \infty} \mu(t_n) = (0,1) \neq \mu(t_0).$$

$\mathcal{C}(X) = \{X\}$, $\mathcal{P}(X) = \{A, G\}$

X è connesso ma non è connesso per archi.
Inoltre la componente connessa per archi G di X non è chiusa.

Teorema Sia X uno spazio.

i) Se X è localmente connesso allora le componenti connesse di X sono aperte e quindi X è unione topologica delle sue componenti connesse.

ii) Se X è localmente connesso per archi allora le componenti connesse per archi sono aperte e coincidono con le componenti connesse.

Dim i) $y \in C_x(X) \Rightarrow \exists\, U \subset X$ intorno connesso di $y \Rightarrow U \cup C_x(X)$ connesso $\Rightarrow$ $U \cup C_x(X) = C_x(X)$ che è quindi aperto $\Rightarrow X$ è unione topologica delle sue componenti connesse.

ii) X loc. connesso p.a. $\Rightarrow X$ loc. connesso $\Rightarrow C_x(X)$ aperto $\forall\, x \in X \Rightarrow C_x(X)$ loc. connesso p.a. (e connesso) $\Rightarrow C_x(X)$ connesso p.a. $\Rightarrow P_x(X) = C_x(X)$.

OSS $\exists$ applicazioni canoniche $\pi_c : X \to C(X)$ e $\pi_p : X \to P(X)$, $\pi_c(x) = C_x(X)$ e $\pi_p(x) = P_x(X)$.

π_c e π_p sono suriettive e possiamo considerare $C(X)$ e $P(X)$ con la topologia quoziente.

Teorema Sia $f : X \to Y$ continua. Allora le applicazioni indotte

$$C(f) : C(X) \to C(Y) \quad \text{e} \quad P(f) : P(X) \to P(Y)$$

$$C(f)(C_x(X)) = C_{f(x)}(Y) \qquad P(f)(P_x(X)) = P_{f(x)}(Y)$$

sono ben definite e continue. Inoltre se $X \cong Y$ allora $\mathcal{C}(X) \cong \mathcal{C}(Y)$ e $\mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(Y)$.

<u>Dim</u> $\mathcal{C}(f)$ è ben definita perché se $x, x' \in \mathcal{C}_x(X)$

$$\Rightarrow f(x), f(x') \in f(\mathcal{C}_x(X)) \text{ che è connesso}$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{C}_x(X)) \subset \mathcal{C}_{f(x)}(Y) \Rightarrow \mathcal{C}_{f(x)}(Y) = \mathcal{C}_{f(x')}(Y)$$

In modo simile si dimostra che $\mathcal{P}(f)$ è ben definita.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_c"'] & Y \arrow[d, "\pi_c"] \\
\mathcal{C}(X) \arrow[r, "\mathcal{C}(f)"'] & \mathcal{C}(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_p"'] & Y \arrow[d, "\pi_p"] \\
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(Y)
\end{tikzcd}$$

Questi diagrammi commutano e quindi $\mathcal{C}(f)$ e $\mathcal{P}(f)$ sono continue nella topologia quoziente. L'ultima affermazione segue dall'osservare che $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ omeo $\Rightarrow$ $\mathcal{C}(f)$ e $\mathcal{P}(f)$ omeo.

<u>OSS</u> $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$: $Top \longrightarrow Top$ sono funtori nella categoria degli spazi vettoriali.

<u>Corollario</u> $R \cong R^n \iff n = 1$.

<u>Dim</u> $\boxed{\Leftarrow}$ ovvio.

$\boxed{\Rightarrow}$ $f : R \xrightarrow{\cong} R^n$ omeo $\Rightarrow f| : R - \{0\} \xrightarrow{\cong} R^n - \{f(0)\}$ omeo. $\# \mathcal{P}(R - \{0\}) = 2 \Rightarrow n = 1$.

Assiomi di numerabilità

Def Sia X uno spazio. Diciamo che X è <u>I-numerabile</u> se qualunque punto $x \in X$ ammette una base di intorni numerabile.

Es 1) $\mathbb{R}^n$ è I-numerabile, infatti $\forall\, x \in X$
$\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}_x = \{ B(x; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ base di intorni numerabile.

2) Più in generale, metrizzabile $\Rightarrow$ I-numerabile (in modo simile).

Def Sia X uno spazio. Diciamo che X è <u>II-numerabile</u> se X ammette una base numerabile.

OSS Sia X uno spazio e sia $A \subset X$ un sottospazio non vuoto.

i) Se X è I-numerabile allora A è I-numerabile.

ii) Se X è II-numerabile allora A è II-numerabile.

iii) II numerabile $\Rightarrow$ I numerabile $\boxed{E}$

Def Un sottoinsieme $D \subset X$ è <u>denso</u> in X se $Cl_X D = D$.

OSS $D \subset X$ denso $\Leftrightarrow$ $D \cap U \neq \emptyset$ $\forall\, U \subset X$ aperto (basico). $\boxed{E}$

Es 1) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ è denso in $\mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

3) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

4) $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ $\boxed{E}$

Def $A \subset X$ è <u>ovunque non denso</u> se $\mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X A) = \emptyset$.

Es 1) $A \subset X$ chiuso e $\mathrm{Int}_X A = \emptyset \Rightarrow A$ ovunque non denso.

2) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ovunque non denso.

Def Uno spazio X è detto <u>separabile</u> se $\exists\, D \subset X$ <u>denso numerabile</u>.

OSS II-numerabile $\Rightarrow$ separabile. Infatti se $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è base numerabile per X, scegliamo $u_n \in U_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow D = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso numerabile.

Se X è metrizzabile allora $D \subset X$ è denso $\iff \forall\, x \in X\ \exists\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ t.c. $x = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Teorema Supponiamo che X sia metrizzabile e separabile. Allora X è II-numerabile.

Dim Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ distanza su X.

$D = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ denso numerabile.

$\mathcal{B} = \{ B(a_n; \frac{1}{k}) \mid n, k \in \mathbb{N} \}$ base numerabile. $\boxed{E}$

Corollario $\mathbb{R}^n$ è II-numerabile e quindi lo sono anche B^n, S^n, T^n.

OSS Se $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ è unione topologica di spazi II-numerabili, allora X è II-numerabile $\iff$ I è al più numerabile. $\boxed{E}$

Teorema Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora U è unione disgiunta al più numerabile di aperti connessi per archi a due a due disgiunti.

Dim U è loc. connesso per archi $\Rightarrow$ le componenti connesse di U sono aperte in U (quindi in $\mathbb{R}^n$), sono connesse per archi e U è unione topologica delle sue componenti connesse, che sono quindi al più numerabili.