

1

Dati due parametri reali α e A , considera la funzione reale di due variabili reali x, y

$$u(x, y) = 1 + x^\alpha - A x y^2 .$$

Trova i valori di α e A tali che $u(x, y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinché

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y) ,$$

dove $v(x, y)$ è anche una funzione reale. Poi assumi che $f(0) = 1$ e determina anche la funzione $v(x, y)$, e dunque $f(z)$.

2

Dati due parametri reali a e b , considera le funzioni reali di due variabili reali x, y

$$u(x, y) = \frac{ab + bx}{(1+x)^2 + y^2} , \quad v(x, y) = -\frac{by}{(1+x)^2 + y^2} .$$

Trova il valore di a tale che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ siano la parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinché

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y) .$$

Poi trova il valore di b affinché valga che

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} f(z) dz = 6\pi i ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine e di raggio 2, orientato in senso antiorario.

3

Considera

$$F(z) = \frac{z^3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z^3 + 1} .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} dz F(z) ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 2, orientato in senso antiorario.

4

Considera

$$F(z) = \frac{z^3 \left(\cosh\left(\frac{2\pi}{z}\right) - 1 \right)}{z^2 + 1}.$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi si calcoli l'integrale

$$\oint_{\gamma(0, \frac{1}{2})} F(z),$$

dove $\gamma(0, \frac{1}{2})$ è un cammino circolare centrato in $z = 0$ di raggio $\frac{1}{2}$, orientato in senso antiorario.

5

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma(0,1)} dz e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1 - \sin \frac{1}{z}},$$

dove $\gamma(0,1)$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

6

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma(0,1)} dz \frac{z + 1}{z^4(1 - \cos \frac{1}{z})},$$

dove $\gamma(0,1)$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

7

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x)}{(x+i)^2}.$$

8

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\cos z)^2}{z^2 + 1}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\cos x)^2}{x^2 + 1} .$$

9

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\sin z)^2}{z^2 + 3} .$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\sin x)^2}{x^2 + 3} .$$

10

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log(z)}{(z + \frac{1}{z})^2} .$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2} .$$

11

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}(z+1)^2} .$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare gli integrali reali

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} , \quad \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2} .$$

12

Dato R numero reale positivo, definiamo $F(R)$ come il seguente integrale

$$F(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,R)} \frac{1}{e^z + 1} dz ,$$

dove $\gamma(0, R)$ è un cammino circolare centrato nell'origine del piano complesso della variabile z , di raggio R , orientato in senso antiorario. Si disegni il grafico di $F(R)$.

13

Dato L numero reale positivo, definiamo $F(L)$ come

$$F(L) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma(L)} \frac{z}{\cosh(z) - 1} dz - \int_{\gamma(-L)} \frac{z}{\cosh(z) - 1} dz \right) ,$$

dove $\gamma(y)$ è un cammino dato dalla retta parallela all'asse x con ordinata costante y , percorsa da $x = -\infty$ a $x = +\infty$. Si disegni il grafico di $F(L)$.

14

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} .$$

15

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+a)}} ,$$

come funzione del parametro reale $a > 0$.

16

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^2 + (1-a)x - a}$$

come funzione del parametro reale $a > 1$.

17

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_1^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x(x^2 - a^2)}$$

come funzione del parametro reale a che soddisfa $-1 < a < 1$.

18

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x) \cos(ax)}{x}$$

come funzione del parametro reale a .