1

Considera una funzione $G(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tale che valga anche $\frac{dG(t)}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$. Trova la costante A tale che valga l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2 = A \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega^2 \hat{G}(-\omega)\hat{G}(\omega) \ ,$$

dove $\hat{G}$ è la trasformata di Fourier di G.

2

Risolvi l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')g(t-t') = \frac{T}{\pi}\frac{1}{t^2+T^2} \ ,$$

per la funzione $g(t)$ usando la trasformata di Fourier e ricordando che

$$\mathcal{F}\left[\frac{T}{\pi}\frac{1}{t^2+T^2}\right](\omega) = e^{-T|\omega|} \ .$$

3

Considera l'equazione

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')e^{-\frac{\pi(t-t')^2}{T^2}} = -g(t) + e^{-\frac{\pi t^2}{T^2}} \ ,$$

per la funzione $g(t)$. Ricordando che

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{\pi t^2}{T^2}}\right](\omega) = Te^{-\frac{T^2\omega^2}{4\pi}} \ .$$

usa l'equazione per determinare la trasformata $\hat{g}(\omega)$. Deduci dalla forma di $\hat{g}(\omega)$ che $g(t)$ è derivabile infinite volte.

4

È data una funzione $G(t)$ che soddisfa l'equazione lineare di ordine N

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n G(t)}{dt^n} = \delta(t) \ ,$$

dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac, e gli a_n sono coefficienti complessi con $a_N \neq 0$. Si determini il comportamento della trasformata di Fourier $\hat{G}(\omega)$ per $\omega \to \infty$. Guardando $\hat{G}(\omega)$ come funzione meromorfa di $\omega \in \mathbb{C}$ per quale valore di N essa ha residuo non nullo all'infinito?

5

Si consideri la funzione seguente funzione in $L^2(\mathbb{R})$

$$F(t) = t\, e^{-t^2} \ .$$

Tale funzione soddisfa l'equazione

$$tF'(t) = F(t) - 2t^2 F(t) \ .$$

Si usi questa equazione per derivare un'equazione differenziale per la trasformata $\hat{F}(\omega)$. Poi si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$ e si verifichi che risolve l'equazione differenziale trovata.

6

Data $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indica lo spazio di Schwarz delle funzioni a decrescenza rapida) si mostri che vale l'identità

$$\int_0^{+\infty} dt (F(t) - F(-t)) = -\frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{\omega} \hat{F}(\omega) \ ,$$

dove $\mathcal{P}$ indica la parte principale (che serve a regolarizzare la divergenza dell'integrale in $\omega = 0$) e $\hat{F}$ è la trasformata di Fourier di F. Si discuta se i due integrali al membro destro e sinistro dell'uguaglianza siano ben definiti anche per $F \in L^2(\mathbb{R})$ o $F \in L^1(\mathbb{R})$.

7

Considera $F(t, x)$ che soddisfa l'equazione del calore

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \ ,$$

dove D è un coefficiente reale positivo, con condizione iniziale $F(0, x) = f(x)$. Determina l'equazione e la condizione iniziale soddisfatta da $\hat{F}(t, k)$, ovvero dalla trasformata di Fourier di F rispetto alla variabile x. Poi risolvi l'equazione per $\hat{F}(t, k)$ con la condizione iniziale trovata. Infine usando l'antitrasformata mostra che

$$F(t, x) = \int dx'\, G(t, x - x') f(x') \ ,$$

dove

$$G(t, x - x') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x-x')} = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi D t}} \ .$$

8

Si consideri la funzione di variabile reale

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \ .$$

Si discuta in che senso sia possibile definirne la trasformata di Fourier. Dando per buono che la trasformata di Fourier è

$$\frac{C}{\sqrt{|k|}} \ ,$$

in che modo si può fissare la costante C senza calcolare esplicitamente la trasformata?

9

Si consideri la funzione della variabile reale x

$$e^{-\epsilon|x|}\frac{1}{\sqrt{|x|}} \ ,$$

dove $\epsilon > 0$ è un parametro positivo. Se ne calcoli la trasformata di Fourier (è conveniente usare il cambio di variabili $x = s_+^2$ per $x > 0$ e $x = -s_-^2$ per $x < 0$). Si spieghi come utilizzare questo risultato per ottenere la trasformata di Fourier di

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \ .$$

10

Il seguente argomento porta a una contraddizione:

- Vale che: $\frac{d}{dt}\arctan(1/t) = \frac{1}{1+1/t^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{1+t^2}$;
- Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri, e usando la proprietà della trasformata della derivata, troviamo:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\arctan(1/t)\right](\omega) = -i\omega\mathcal{F}\left[\arctan(1/t)\right](\omega)$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left[\arctan(1/t)\right](\omega) = -i\frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega} \ ;$$

- $\arctan(1/t)$ va come $1/t$ per $t \to \pm\infty$, ed è una funzione limitata per tutti gli altri valori di t, dunque è in $L^2(\mathbb{R})$. Pertanto la sua trasformata di Fourier deve anch'essa essere in $L^2(\mathbb{R})$;
- la funzione $-i\frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega}$ va come $1/\omega$ per $\omega \to 0$, dunque non è in $L^2(\mathbb{R})$.

Trova l'errore e risolvi l'apparente paradosso. [*Suggerimento:* Guarda come si comporta la funzione $\arctan(1/t)$ vicino a $t = 0$. Riesamina alla luce di questo il calcolo della sua derivata.]

11

Si consideri la funzione speciale *seno integrale*, che si indica con Si ed è definita da

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t dt' \, \frac{\sin(t')}{t'} \ .$$

Ricordando che la trasformata di Fourier di $\sin t/t$ è data da $\pi\theta(1-|\omega|)$, dove θ indica la funzione θ di Heaviside, si mostri che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\mathrm{Si}(t)^2}{t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} d\omega \, \log(|\omega|)^2 \ .$$

[*Suggerimento:* Nota che, detta $f(t) = \frac{\mathrm{Si}(t)}{t}$, vale che $\frac{d}{dt}(tf(t)) = \sin t/t$. Quindi...]

12

Si consideri l'equazione integrale per la funzione $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, G(t-t') f(t') + H(t) \ ,$$

dove $G(t)$ e $H(t)$ sono funzioni date. Si determini $\hat{f}(\omega)$ in funzione di $\hat{G}(\omega)$ e $\hat{H}(\omega)$. Si consideri poi il caso particolare in cui

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2} \ , \quad H(t) = \frac{2}{4+t^2} - \frac{3}{9+t^2} \ .$$

Si usi la soluzione per $\hat{f}(\omega)$ per calcolare l'integrale

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} f(t) \ ,$$

dove α è un numero reale > 0.

13

Una corda elastica è estesa lungo l'asse x nell'intervallo $x \in [-L, L]$. La spostamento lungo l'asse y al tempo t è dato da una funzione $Y(t, x)$ che soddisfa l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \ .$$

La corda è fissata agli estremi, ovvero per qualsiasi t abbiamo condizioni al bordo $Y(t, -L) = Y(t, L) = 0$. Inoltre abbiamo le condizioni iniziali

$$Y(0, x) = L \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) \ , \quad \frac{\partial Y}{\partial t}(0, x) = \pi C \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \ .$$

Si determini $Y(t, x)$ sviluppando la funzione in un opportuno sistema completo, e risolvendo l'equazione e le condizioni iniziali per i coefficienti.