Esercizio 1. *Trovare una soluzione particolare delle equazioni differenziali seguenti e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.*

Soluzione.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' - u' = t^2 \tag{1}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$$

Vi sono due soluzioni distinte

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 + C_2 e^t$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) della forma

$$S(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$$

ove si è scelto un polinomio di grado 3 privo di termine di grado 0 perché il membro sinistro della (1) non presenta termini in u e quello destro è un polinomio di grado 2. Sostituendo $S(t)$ nella (1) troviamo:

$$6At + 2B - 3At^2 - 2Bt - C = t^2$$

da cui per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = -1 \\ C = -2 \end{cases}$$

da cui la soluzione generale della (1) è dato da:

$$u(t) = C_1 + C_2 e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' - 4u = e^{2t} \tag{2}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

Vi sono due soluzioni distinte

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 2$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (2) della forma

$$S(t) = Ae^{2t}$$

Sostituendo $P(t)$ nella (2) troviamo:

$$4Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = e^{2t}$$

che è impossibile se $A \neq 0$. Proviamo allora

$$S(t) = Ate^{2t}$$

Sostituendo $S(t)$ nella (2) troviamo:

$$4Ae^{2t} + 4Ae^{2t}t - 4Ate^{2t} = e^{2t}$$

da cui $A = \frac{1}{4}$ e la soluzione generale della (2) è data da:

$$u(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + 2u' = 3te^t \tag{3}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$$

Vi sono due soluzioni distinte

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 + C_2e^{-2t}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (3) della forma

$$S(t) = e^t(At + B)$$

Sostituendo $S(t)$ nella (3) troviamo:

$$e^t[(3At + (3B + 4A)] = 3te^t$$

da cui

$$\begin{cases} 3A = 3 \\ 3B + 4A = 0 \end{cases}$$

e quindi $A = 1$ e $B = -\frac{4}{3}$. La soluzione generale della (3) è data da:

$$u(t) = C_1e^{-2t} + C_2 + \left(t - \frac{4}{3}\right)e^t$$

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + 4u = \sin(t) \tag{4}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

Vi sono due soluzioni distinte

$$\lambda_1 = 2i \quad \lambda_2 = -2i$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (4) della forma

$$S(t) = A \sin(t)$$

Sostituendo $S(t)$ nella (4) troviamo:

$$-A \sin(t) + 4A \sin(t) = \sin(t)$$

da cui $A = \frac{1}{3}$. La soluzione generale della (4) è data da:

$$u(t) = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t) + \frac{1}{3} \sin(t)$$

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' - 2u' + u = e^t + e^{2t} \tag{5}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Vi sono due soluzioni coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Siccome $\lambda = 1$ è radice doppia per il polinomio $P(\lambda)$, cerchiamo prima una soluzione particolare di

$$u'' - 2u' + u = e^t \tag{6}$$

Osserviamo che l'equazione (6) può essere messa nella forma:

$$(D-1)^2[u(t)] = e^t$$

Ricordiamo inoltre che vale la seguente uguaglianza:

$$(D-\lambda)^k[f(t)e^{\lambda t}] = f^{(k)}(t)e^{\lambda t}$$

pertanto sarà sufficiente cercare soluzioni di (6) della forma

$$S_1(t) = At^2e^t$$

dato che sarebbe inutile cercare soluzioni di (6) della forma

$$\tilde{S}_1(t) = (At^2 + Bt + C)e^t$$

in quanto

$$(D - \lambda)^2[\tilde{S}(t)e^{\lambda t}] = (D - \lambda)^2[S(t)e^{\lambda t}]$$

Sostituendo $S_1(t)$ nella (6) troviamo:

$$\begin{aligned}
&A\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(2t + t^2)e^t] - 2[A(2t + t^2)e^t] + t^2e^t\right\} \\
&\Leftrightarrow A\left\{[(2t + t^2 + 2t + 2)e^t] - 2[(2t + t^2)e^t] + t^2e^t\right\} = e^t \\
&\Leftrightarrow Ae^t[t^2 - 2t^2 + t^2 + 2t + 2t - 4t + 2] = e^t \\
&\Leftrightarrow 2A = 1
\end{aligned}$$

da cui $A = \frac{1}{2}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare di

$$u'' - 2u' + u = e^{2t} \tag{7}$$

questa volta della forma

$$S_2(t) = Be^{2t}$$

Sostituendo $S_2(t)$ nella (7) troviamo:

$$4Be^{2t} - 4Be^{2t} + Be^{2t} = e^{2t}$$

da cui $B = 1$ La soluzione generale della (5) è data da:

$$u(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}e^tt^2 + e^{2t}$$

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + u = te^t \sin(2t) \tag{8}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Vi sono due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata assume la forma:

$$v(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

Siccome $\lambda = 1+2i$ non è radice per il polinomio $P(\lambda)$, cerchiamo una soluzione particolare di (8) della forma

$$S(t) = e^t[(At + B)\sin(2t) + (Ct + D)\cos(2t)]$$

La sostituzione in questa forma non è agevole pertanto procediamo in un altro modo. Possiamo eseguire la sostituzione $u = e^t v$ nella (8) e, dopo opportune semplificazioni, ricondurci all'equazione differenziale

$$v'' + 2v' + 2v = t\sin(2t) \tag{9}$$

di cui cerchiamo una soluzione particolare della forma:

$$\tilde{S}(t) = (At + B)\cos(2t) + (Ct + D)\sin(2t)$$

Sostituendo $\tilde{S}(t)$ nella (9), dopo le dovute semplificazioni troviamo:

$$\begin{aligned}&[(-2A + 4C)t + (2A - 2B + 4C + 4D)]\sin(2t)\\&[(-4A - 2C)t + (-4A - 4B + 2C - 2D)]\cos(2t) = t\sin(2t)\end{aligned}$$

da cui si ricava il seguente sistema lineare in quattro equazioni e quattro incognite:

$$\begin{cases}(-2A + 4C) = 1\\(2A - 2B + 4C + 4D) = 0\\(-4A - 2C) = 0\\(-4A - 4B + 2C - 2D) = 0\end{cases}$$

che risolto dà

$$\begin{cases}A = -\frac{1}{5}\\B = \frac{1}{25}\\C = -\frac{1}{10}\\D = \frac{11}{50}\end{cases}$$

Una soluzione particolare di (9) è data da:

$$\left(\frac{11}{50} - \frac{t}{10}\right)\sin(2t) + \left(\frac{1}{25} - \frac{t}{5}\right)\cos(2t)$$

pertanto la soluzione generale della (8) è data da:

$$v(t) = C_1\sin(t) + C_2\cos(t) + e^t\left[\left(\frac{11}{50} - \frac{t}{10}\right)\sin(2t) + \left(\frac{1}{25} - \frac{t}{5}\right)\cos(2t)\right]$$