$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
(formula di Leibniz)

OSS 1) Se A è triangolare (superiore o inferiore) allora $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. Infatti nella formula di Leibniz gli addendi con $\sigma \neq id$ contengono un certo $a_{i\sigma(i)} = 0$.

Es $\det \begin{pmatrix} 1 & 79 & 3914 \\ 0 & 1 & 145000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

2) Se A ha una riga (o colonna) nulla allora $\det A = 0$.

Teorema Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Allora $\det {}^tA = \det A$.

Dim ${}^tA = (a'_{ij})$, $a'_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j = 1, \dots, n$.

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}}_{\text{riordinare}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(1)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det A$$

Usiamo: $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\underset{id}{\underset{\parallel}{\sigma\sigma^{-1}}}) = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma$

Teorema Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e sia $\pi \in S_n$. Consideriamo la matrice B ottenuta da A permutando le righe (o le colonne) mediante π. Allora

$$\det B = \operatorname{sgn}(\pi) \det A.$$

In particolare, se π è pari, $\det B = \det A$ e se $\pi = (i\,j)$ è una trasposizione allora $\det B = -\det A$.

Dim A meno di passare alla trasposta (det non cambia) non è restrittivo dimostrarlo nel caso delle colonne.

$$B = (b_{ij}) \qquad B_{(j)} = A_{(\pi^{-1}(j))}$$

$$b_{ij} = a_{i\pi^{-1}(j)}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1(\pi^{-1}\circ\sigma)(1)} \cdots a_{n(\pi^{-1}\circ\sigma)(n)}$$

Posto $\tau = \pi^{-1}\circ\sigma \Rightarrow \sigma = \pi\circ\tau$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi\circ\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} =$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} =$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi) \det A.$$

OSS Se $2 = 0$ in $\mathbb{K}$ (es. per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$), nella precedente si ha $\det B = \det A$, dato che $1 = -1$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una funzione $\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$ è detta <u>multilineare</u> se φ è <u>lineare in ciascun argomento</u> lasciando fissi gli altri, cioè se:

i) $\varphi(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_s) = \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s) + \varphi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_s)$

ii) $\varphi(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_s) = \lambda\, \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s)$

$\forall\, v_1, \ldots, v_s, v_i' \in V,\ \forall\, i = 1, \ldots, s,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Per $s=2$, una funzione multilineare $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta <u>bilineare</u>.

<u>Es</u> $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

è bilineare.

<u>Def</u> Sia $\varphi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione multilineare sul $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Diciamo che φ è <u>alternante</u> se $\forall v_1, \dots, v_s \in V$ t.c. $v_i = v_j$ per certi $i \neq j$ si ha $\varphi(v_1, \dots, v_s) = 0$.

$\det: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ può essere considerato funzione delle <u>colonne</u> (o anche delle righe) di una matrice $\leadsto$

$$\det: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\substack{\text{vettori colonna} \\ \text{di } \mathbb{K}^n}} \longmapsto \det \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice con} \\ \text{colonne } v_1, \dots, v_n}}$$

<u>Teorema</u> La funzione determinante $\det: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$ è multilineare alternante sia rispetto alle righe che alle colonne.

<u>Dim</u> Il teorema vale per ogni campo ma per semplicità lo dimostriamo per $\mathbb{K}$ t.c. <u>$2 \neq 0$</u> (es $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Dimostriamo che det è multilineare.

A meno di passare alla trasposta, basta dimostrarlo per le righe.

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, con $A^{(i)} = X + Y$, con $\left.\begin{matrix} X = (x_1, \dots, x_n) \\ Y = (y_1, \dots, y_n) \end{matrix}\right\} \in \mathbb{K}^n$

$a_{ij} = x_j + y_j$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (x_{\sigma(i)} + y_{\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}, \quad X \text{ e } Y \text{ } i\text{-esime righe.}$$

In modo simile (ma più semplice) si fa vedere che

$$\det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \lambda \det A,$$ dove solo la i-esima riga è moltiplicata per $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mostriamo che det è alternante. Supponiamo $i<j$

$$\det(\dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots) \underset{\substack{i \leftrightarrow j \\ \text{scambio}}}{=} -\det(\dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots) \implies$$

$$2 \det(\dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots) = 0 \implies \det(\dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots) = 0$$

per ogni scelta degli argomenti.

<u>OSS</u> Su $\mathbb{Z}_2$ la dimostrazione è diversa.