6 Dicembre

<u>Teor</u> (Del confronto asintotico) Siano f e $g \in L_{loc.}([a,b))$ con $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b)$ e $g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b)$.

Sia $L = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Valgono:

1) Se $L \in \mathbb{R}_+$ $(0 < L < +\infty)$ allora $f \in L[a,b) \Leftrightarrow g \in L[a,b)$.

2) Se $L = +\infty$ allora $f \in L[a,b) \Rightarrow g \in L[a,b)$

$(g \notin L[a,b) \Rightarrow f \notin L[a,b))$

3) Se $L = 0$ allora $g \in L[a,b) \Rightarrow f \in L[a,b)$

$(f \notin L[a,b) \Rightarrow g \notin L[a,b))$

Esempi $\int_1^{+\infty} \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$ Sommabile

Sappiamo $\lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0,+\infty)$$

$$\frac{1}{x} \notin L[1,+\infty) \Longrightarrow \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) \notin L[1,+\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} (\overbrace{1-\tanh(x)}^{\to 0})\, dx$$

Ci ricordiamo che $1-th(x) = 2e^{-2x}(1+o(1))$ per $x\to+\infty$

$$1-th(x) = 1 - \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{\cancel{e^x}+e^{-x}-(\cancel{e^x}-e^{-x})}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} =$$

$$= \frac{2e^{-x}}{e^x(1+e^{-2x})} = 2e^{-2x}\frac{1}{1+e^{-2x}} = 2e^{-2x}(1+o(1))$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-th\,x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{e^{-2x}}(1+o(1))}{\cancel{e^{-2x}}} = 2 \in (0,+\infty)$

$1-th(x) \in L[0,+\infty) \Longleftrightarrow e^{-2x} \in L[0,+\infty)$ $\quad f(x)\Big]_0^R = f(R) - f(0)$

e^{-2x} è integrabile in $[0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-2x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{e^{-2R}}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{[x]^p}\,dx$ è sommabile per $p>1$.

$\frac{1}{[x]^p} \in L_{loc}[1,+\infty)$

confrontiamo con x^{-p}

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]^{-p}}{x^{-p}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{-p}}(1+o(1))^{-p}}{\cancel{x^{-p}}} = 1$$

$$[x] = x + \underbrace{[x]-x}_{(-1,0]} =$$

$$= x\left(1+\frac{[x]-x}{x}\right)$$

$$[x]\le x<[x]+1$$

$$[x]-x\le 0<[x]-x+1$$

$$-1<[x]-x\le 0$$

$[x] = x(1+o(1))$

Il limite garantisce che $[x]^{-p}\in L[1,+\infty) \iff x^{-p}\in L[1,+\infty)$

Noi sappiamo già che $x^{-p}\in L[1,+\infty)\iff p>1$

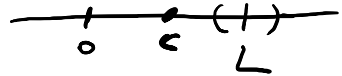
Cosa si può dire per quando $[x]^{-p}$ appartiene a $L[0,+\infty)$

se $p>0$, $[x]^{-p}$ non è definito in $[0,1)$

per $p\le 0$ non sono integrabili in $L[1,+\infty)$

Esercizio Dimostrare che se $f \in L[0,+\infty)$ e se esiste $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora $L = 0$.

Dim Procediamo per assurdo e supponiamo che esista $f \in L[0,+\infty)$ con $+\infty > L > 0$.

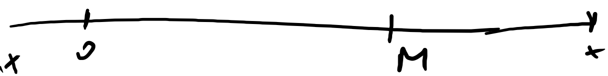


Sia $0 < c < L$

Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \exists\, M$ t.c. $x \geq M$ ho

$f(x) > c$.

Allora per $x >> 1$



$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt >$$

$$> \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x c\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + (x-M)c$$

$$\int_0^x f(t)\,dt > \int_0^M f(t)\,dt + (x-M)c \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty \Rightarrow f \notin L[0,+\infty)$$

Def Sia $f \in L_{loc}[a,b)$. Diciamo che f è assolutamente integrabile in $[a,b)$ se $|f| \in L[a,b)$

Teor Se f è assolutamente integrabile in $[a,b)$ allora $f \in L[a,b)$

Esercizio Dare un esempio di funzione f t.c. $f \notin L[a,b]$ ma $|f| \in L[a,b]$ (f non integrabile per Darboux ma $|f|$ integrabile per Darboux)

Esempio $\quad \frac{1}{1+x^2}\sin x \in L[0,+\infty)$

Infatti $\quad \left|\frac{1}{1+x^2}\sin x\right| \le \frac{|\sin x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \in L[0,+\infty)$

$\frac{1}{1+x^2}\in L[1,+\infty) \iff x^{-2}\in L[1,+\infty)$, e quest'ultimo e' vero

$\Updownarrow$

$\frac{1}{1+x^2}\in L[0,+\infty)$

Per confronto si ha che $\quad \frac{|\sin x|}{1+x^2}\in L[0,+\infty) \Longrightarrow$

$$\frac{\sin x}{1+x^2}\in L[0,+\infty).$$

Esempio $\quad \frac{\overset{\cos x}{\sin x}}{x^p} \in L[1,+\infty) \quad$ per $\quad p>1$

In effetti $\quad \frac{\overset{\cos x}{|\sin x|}}{x^p} \le \frac{1}{x^p}\in L[1,+\infty) \Longrightarrow \frac{\overset{\cos x}{\sin x}}{x^p}\in L[1,+\infty)$ per $p>1$

Esempio $\quad \frac{\sin x}{x^p}\in L[1,+\infty)$ per $\quad 1\ge p>0$. Vedremo poi che per $\quad p\in(0,1] \quad \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \notin L[1,+\infty)$

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \int_1^R \frac{(-\cos x)'}{x^p}\,dx = -\frac{\cos x}{x^p}\Big]_1^R +$$

$$+\int_1^R \cos x\left(\frac{1}{x^p}\right)' dx = \cos(1) - \frac{\cos(R)}{R^p} - p\int_1^R \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx$$

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \cos(1) - \underbrace{\frac{\cos(R)}{R^p}}_{\downarrow\ 0} - \underbrace{p\int_1^R \frac{\cos x}{x^{\underbrace{p+1}_{>1}}}\,dx}_{\substack{\downarrow\ R\to+\infty \\ \text{esiste in } \mathbb{R}}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{x^p}\in L[1,+\infty) \quad \forall\ p>0.$$

Verifichiamo ora che per $0 < p \leq 1$, $\frac{|\sin x|}{x^p} \in L[1,+\infty)$

E' equivalente verificare che $\frac{|\sin x|}{x^p} \notin L[\pi,+\infty)$

Supponiamo per assurdo che $\frac{|\sin x|}{x^p} \in L[\pi,+\infty)$. Allora

$$+\infty > \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\pi}^{R} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx \geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi^p (j+1)^p} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x|\,dx}_{=2}$$

in $[j\pi,(j+1)\pi]$ ho $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{\pi^p (j+1)^p}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi^p} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{j+1}^{j+2} \frac{1}{[x]^p}$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \int_{2}^{n+2} \frac{1}{[x]^p}\,dx = +\infty$$

perché $\frac{1}{[x]^p} \notin L[2,+\infty)$

$0 < p \leq 1$