Nome e Cognome:

Risolvere i seguenti esercizi in 90 minuti

Esercizio 1 (3 punti)**.** Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$. Cosa vuol dire che una famiglia $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ è *ortonormale* rispetto al prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$?

Dimostrare che la famiglia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} \, e^{in\omega x} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{C}\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]; \, \mathbb{C} \right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

è ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]; \, \mathbb{C}\right)} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Una famiglia $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ si dice ortonormale se per ogni $\alpha, \beta \in A$

$$\langle f_\alpha, f_\beta \rangle_V = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{se } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ e $\mathsf{e}_n(x) = T^{-1/2} e^{in\omega x}$

$$\langle \mathsf{e}_n, \mathsf{e}_m \rangle_{L^2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega x} \mathrm{d}x,$$

quindi è chiaro che se $n = m$ allora $\langle \mathsf{e}_n, \mathsf{e}_m \rangle_{L^2} = 1$ mentre se $n \neq m$

$$\langle \mathsf{e}_n, \mathsf{e}_m \rangle_{L^2} = \frac{1}{i\omega T (n-m)} \left(e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right) = \frac{1}{i\omega T (n-m)} \left((-1)^{n-m} - (-1)^{n-m} \right) = 0.$$

□

Esercizio 2 (3+1 punti)**.** Sia f l'estensione 2π-periodica della funzione

$$-\chi_{(-\pi,0)}(x) + \chi_{(0,\pi)}(x),$$

e sia S_N al ridotta N-esima di f.

1. Esiste una funzione 2π-periodica $f^\star : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ per la quale la convergenza

$$S_N(x) \xrightarrow{N \to \infty} f^\star(x), \qquad \forall \, x \in [-\pi, \pi],$$

   sia verificata? Se si, si scriva l'espressione esplicita di $f^\star$.

2. Calcolare la serie di Fourier di f.

3. (Extra) Dedurre, senza utilizzare il punto precedente, che la serie di Fourier di f può esprimersi come serie delle armoniche elementari $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ solamente.

Dimostrazione.

1. Si, utilizzando il teorema di Dirichelet-Weierstrass si ottiene che $S_N(x) \xrightarrow{N \to \infty} f(x)$ per ogni x.

2. È sufficiente calcolare i coefficienti

$$\begin{aligned} c_n(f) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-inx} \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-inx} \mathrm{d}x, \\ = & -\frac{1}{2\pi \, in} \left[e^{in\pi} - 1 + e^{-in\pi} - 1 \right], \\ = & \frac{1}{2\pi \, in} 2 \left(1 - \cos(n\pi) \right), \\ = & \frac{1}{\pi \, in} \left(1 - (-1)^n \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$c_n(f) = \begin{cases} -\,2/i\pi n & \text{se } n \text{ dispari}, \\ 0 & \text{se } n \text{ pari}, \end{cases}$$

il quale ci permette di dedurre che

$$f(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2k+1)x}}{2k+1}.$$

Alternativamente possiamo esprimere l'espansione di f nella famiglia di armoniche elementari $(1,\ \sin(nx),\ \cos(nx))_{n\geq 1}$ usiamo le relazioni

$$a_n = c_n + c_{-n} = 0, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \begin{cases} -\,4/\pi n & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases},$$

per ottenere che

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

3. Notiamo che la funzione f è dispari, dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $x \mapsto f(x)\ \cos(nx)$ è dispari, il quale implica che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0,$$

e dunque la serie di Fourier di f sarà una serie delle armoniche elementari $(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ solamente. □

Esercizio 3 (4 punti)**.** Si consideri la serie di Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}\right)^{-|n|} e^{inx},$$

1. Si consideri $\varphi > 0$ tale che

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

si dimostri che

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}.$$

2. Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier e,
3. Provare che la serie di Fourier converge a una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Dimostrazione. 1. Notiamo che se $\varphi = 1 + 1/\varphi$ allora reiterando tale identità otteniamo che

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = \ldots,$$

quindi reiterando tale procedura all'infinito otteniamo il risultato desiderato.

2. Se $\varphi = 1 + 1/\varphi$ allora φ deve essere soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

e tale equazione ammette una sola soluzione positiva

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,$$

siccome $\varphi > 1$ otteniamo immediatamente che la serie dei coefficienti della serie di Fourier considerata è assolutamente sommabile, per l'M-test di Weiertrass la serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Siccome la convergenza puntuale è più debole della convergenza uniforme otteniamo che la serie di Fourier converge pure puntualmente.

3. Siccome $\varphi > 1$ possiamo dire che $\varphi^{-|n|} = o\left(|n|^{-p}\right),\ \forall p > 0$e dunque la serie di Fourier converge a una funzione $g \in \mathcal{C}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ossia

$$g \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}).$$

□