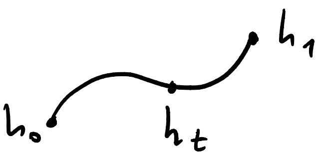
Omotopia

Def Siano X e Y spazi topologici. Un'omotopia da X a Y è un'applicazione continua
$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y.$$
Poniamo $h_t : X \longrightarrow Y$
$$h_t(x) \overset{\text{def}}{=} H(x,t) \quad \forall x \in X, \ \forall t \in [0,1].$$

Oss Un'omotopia è quindi una famiglia "continua" $(h_t)_{t\in[0,1]}$ di applicazioni $h_t : X \to Y$.

Si può vedere anche come un cammino continuo
$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow C(X,Y) \\ t &\longmapsto h_t \end{aligned}$$



nello spazio delle applicazioni continue $C(X,Y)$ munito di una opportuna topologia (non ci addentriamo).

Def Due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ sono omotope se esiste un'omotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$. Scriviamo $f \simeq g$.

$f : X \to Y$ è omotopa a costante se $\exists$ omotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 =$ costante (in inglese: null-homotopic). Scriviamo $f \simeq \text{cost}$.

Es Due applicazioni $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sono sempre omotope:
$$H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x).$$

OSS L'omotopia tra applicazioni è una relazione d'equivalenza in $C(X,Y)$:

i) $f \simeq f \quad \forall f \in C(X,Y)$, $H(x,t) = f(x)$ (riflessiva)

ii) $f \underset{H}{\simeq} g \Rightarrow g \underset{\bar{H}}{\simeq} f$, $\bar{H}(x,t) \overset{def}{=} H(x,1-t)$ (simmetrica)

iii) $f \underset{H}{\simeq} g$ e $g \underset{K}{\simeq} p \Rightarrow f \underset{H*K}{\simeq} p$ (transitiva)

$$(H*K)(x,t) \overset{def}{=} \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Def Un'applicazione continua $f: X \to Y$ è detta equivalenza omotopica se esiste un'applicazione continua $g: Y \to X$ t.c. $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. In tal caso g è detta inversa omotopica di f.

Def Diciamo che due spazi X e Y sono omotopicamente equivalenti (o anche che hanno lo stesso tipo d'omotopia) se esiste un'equivalenza omotopica $f: X \to Y$. Scriviamo $X \simeq Y$.

OSS L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici. $\boxed{E}$

Teorema Gli omeomorfismi sono equivalenze omotopiche. Pertanto $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Dim Sia $f: X \xrightarrow{\cong} Y$ omeo $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: Y \xrightarrow{\cong} X$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f = id_X \simeq id_X$ e $f \circ f^{-1} = id_Y \simeq id_Y$.

Def Uno spazio X è <u>contraibile</u> se è omotopicamente equivalente ad un punto $\{*\}$. Scriviamo $X \simeq \{*\}$

Teorema X è contraibile $\Leftrightarrow id_X \simeq$ cost.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $f: X \to \{*\}$ equivalenza omotopica $\Rightarrow$

$\exists\, g: \{*\} \to X$ inversa omotopica : $g \circ f =$ cost $\simeq id_X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $H: X \times [0,1] \to X$ omotopia con $h_0 =$ cost, $h_1 = id_X$

$h_0(x) = x_0 \quad \forall x \in X \rightsquigarrow$

$f: X \to \{x_0\}, \quad f(x) = x_0 \quad \forall x \in X$

$g: \{x_0\} \to X, \quad g(x_0) = x_0$.

$g \circ f = h_0 \simeq h_1 = id_X, \quad f \circ g = id_{\{x_0\}} \Rightarrow$

f equivalenza omotopica con inversa omotopica $g \Rightarrow$

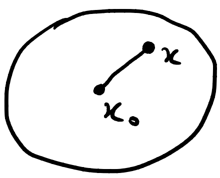
$X \simeq \{x_0\}$.

Corollario Ogni sottospazio <u>convesso</u> di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Dim $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso e sia $x_0 \in X$

$H: X \times [0,1] \to X, \quad H(x,t) = tx + (1-t)x_0$

$h_0 =$ cost, $h_1 = id_X$.

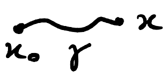


X

Oss $\mathbb{R}^n$ e B^n sono contraibili.

Corollario Se X è contraibile allora è connesso per archi.

Dim $H: X \times [0,1] \to X$ omotopia con $h_0 =$ cost $= x_0$, $h_1 = id_X$

$\forall x \in X \rightsquigarrow \gamma: [0,1] \to X, \quad \gamma(t) = h_t(x)$


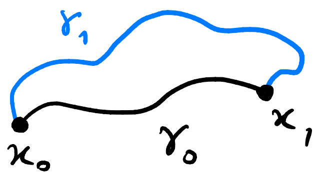
Vediamo ora l'omotopia relativa.

Def Siano X e Y due spazi e sia $A \subset X$ un sottospazio. Due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ t.c. $f|_A = g|_A$ sono dette omotope relativamente ad A se esiste un'omotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_t|_A = f|_A$ $\forall t \in [0,1]$.
Scriviamo $f \simeq_A g$ o anche $f \simeq g$ (rel A).

OSS In un'omotopia relativa ad $A \subset X$, nei punti di A le applicazioni non cambiano durante tutta l'omotopia.

Ora studieremo le omotopie di cammini.

Consideriamo due cammini $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ tra i punti $x_0, x_1 \in X$, cioè $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x_0$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = x_1$.

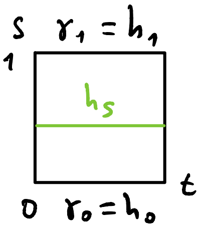


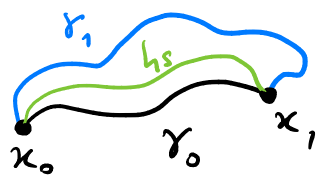
γ_0 e γ_1 sono omotopi rel $\{0,1\}$ se esiste un'omotopia

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \qquad \text{t.c. } h_0 = \gamma_0,\ h_1 = \gamma_1 \text{ e}$$
$$(t, s) \longmapsto h_s(t) \qquad h_s(0) = x_0,\ h_s(1) = x_1,\ \forall s \in [0,1].$$

t parametro dei cammini

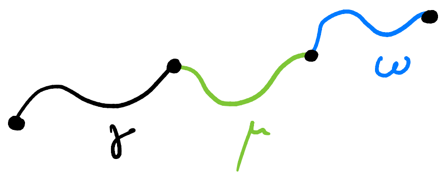
s parametro dell'omotopia





Un cammino costante sarà denotato con $*$.

Teorema Siano $\gamma, \mu, \omega : [0,1] \longrightarrow X$ cammini t.c. $\gamma(1) = \mu(0)$ e $\mu(1) = \omega(0)$. Si ha:



i) $* \cdot \gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \cdot * \simeq_{\{0,1\}} \gamma$

ii) $\gamma \cdot \bar{\gamma} \simeq_{\{0,1\}} * \simeq_{\{0,1\}} \bar{\gamma} \cdot \gamma$

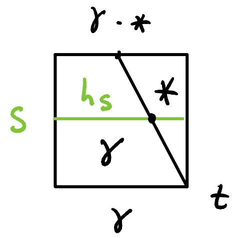
iii) $\gamma \cdot (\mu \cdot \omega) \simeq_{\{0,1\}} (\gamma \cdot \mu) \cdot \omega$.

Dim Ne dimostreremo qualcuna, lasciando le altre per esercizio.

i) $\gamma \cdot * \simeq_{\{0,1\}} \gamma$ $\qquad (\gamma \cdot *)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ * = \gamma(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma\left(\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-1} t\right), & 0 \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ * = \gamma(1), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

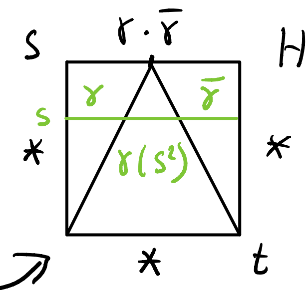


$h_0 = \gamma$, $h_1 = \gamma \cdot *$

$h_s(0) = \gamma(0)$, $h_s(1) = * = \gamma(1)$ $\forall\ s \in [0,1]$.

ii) $(\gamma \cdot \bar{\gamma})(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\gamma}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \implies \bar{\gamma}(2t-1) = \gamma(2-2t)$



$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2st), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \gamma(s^2), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \gamma(2s(1-t)), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

iii)