Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e supponiamo che $A' \in M_n(\mathbb{K})$ sia ottenuta da A mediante una sola operazione elementare di tipo III sulle righe (o colonne). Allora $\det A' = \det A$.

Dim A' ottenuta da A sommando $\lambda A^{(j)}$ ad $A^{(i)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} + \lambda A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A} + \lambda \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{2 righe uguali}} = \det A$$

Pertanto con un'operazione elementare sulle righe (o sulle colonne) $A \rightsquigarrow A'$

1) Scambio di due righe : $\det A' = -\det A$
2) moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$: $\det A' = \lambda \det A$
3) Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga : $\det A' = \det A$.

In questo modo si può facilmente (e in genere rapidamente) calcolare il determinante riducendo la matrice a gradini (triangolare) mediante Gauss e tenendo traccia delle operazioni (1), mentre le operazioni (2) si possono evitare.

Es $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$A \overset{-}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{34}{3} \end{pmatrix}$$

$\det A = -34$.

Teorema Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora $\det A \neq 0$ se e solo se $\operatorname{rg} A = n$.

Dim A può essere ridotta ad una matrice a gradini B mediante operazioni elementari $\Rightarrow \det A = \lambda \det B$ per un certo $\lambda \neq 0$.

Quindi $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$. Ma $\det B = b_{11} \cdots b_{nn}$ con $B = (b_{ij})$. Quindi $\det B \neq 0 \Leftrightarrow b_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ $\Leftrightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = n$.

Oss $\det A = 0 \Leftrightarrow$ le righe (colonne) di A sono linearmente dipendenti.

Lemma Sia $A \in GL_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile. Allora A è prodotto di un numero finito di matrici elementari.

Dim Mediante un certo numero s di operazioni elementari possiamo trasformare A in I_n.

Ciascuna operazione elementare si realizza moltiplicando a sinistra per una matrice elementare. Quindi troviamo matrici elementari $E_1, \dots, E_s$ t.c.

$$E_s \cdots E_1 A = I_n \implies A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}.$$ Ma E_i^{-1} è elementare $\forall\, i = 1, \dots, s$

OSS Se $E \in GL_n(\mathbb{K})$ è elementare allora

i) $\det E = -1$ se di tipo 1 (scambio di righe)

ii) $\det E = \lambda \neq 0$ se di tipo 2 (moltiplicare una riga per λ)

iii) $\det E = 1$ se di tipo 3 (sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga).

Lemma Siano $A, E \in M_n(\mathbb{K})$ con E elementare. Allora $\det(EA) = \det E \cdot \det A$.

Dim Segue subito dall'osservazione precedente e da quanto detto sulle operazioni elementari e det.

Teorema di Binet Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Dim Consideriamo due casi:

i) $\det A = 0 \implies \operatorname{rg} A < n \implies \operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A < n \implies \det(AB) = 0 = \det A \cdot \det B$.

ii) $\det A \neq 0 \implies \exists\, E_1, \dots, E_s \in GL_n(\mathbb{K})$ matrici elementari t.c. $A = E_1 \cdots E_s$. Per induzione su $s \geq 1$.

Base dell'induzione $s=1$: ovvio per il lemma.

Ipotesi induttiva: supponiamo l'enunciato vero per ogni matrice A prodotto di $s-1 \geq 1$ matrici elementari e per ogni matrice B. Sia $A = E_1 \cdots E_s$ prodotto di $s \geq 2$ matrici elementari: $\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_s B) =$
$= \det E_1 \cdot \det(E_2 \cdots E_s B) = \det E_1 \cdot \det(E_2 \cdots E_s) \det B =$
$= \det(E_1 \cdots E_s) \det B = \det A \cdot \det B$.

Corollario Sia $A \in GL_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile. Allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dim $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A A^{-1}) = \det I_n = 1$.

Def Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili se esiste una matrice invertibile $T \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = T^{-1} A T$.

Teorema La similitudine è una relazione d'equivalenza in $M_n(\mathbb{K})$.

Dim i) $A = I_n^{-1} A I_n \Rightarrow A$ simile ad A (riflessiva)

ii) A e B simili $\Rightarrow \exists\, T \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = T^{-1} A T \Rightarrow$
$A = T B T^{-1} = S^{-1} B S$ con $S = T^{-1}$ (simmetrica)

iii) A simile a B e B simile a $C \Rightarrow \exists\, T, S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = T^{-1} A T$ e $C = S^{-1} B S \Rightarrow$
$C = S^{-1} T^{-1} A T S = (TS)^{-1} A (TS) \Rightarrow A$ e C simili (transitiva)

Corollario Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili allora

$$\det A = \det B$$

Dim $\exists\ T \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = T^{-1} A T \Rightarrow$

$$\det B = \det(T^{-1} A T) = \det(T^{-1}) \cdot \det A \cdot \det T =$$
$$= (\det T)^{-1} \cdot \det T \cdot \det A = \det A.$$

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si chiama *minore* di A il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A. Denotiamo con A_{ij} il minore ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

Es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

Def Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Il *complemento algebrico* (o *cofattore*) di a_{ij} è

$$a_{ij}^* \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Formula di Laplace Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Allora

i) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij}^*$ (sviluppo secondo la i-esima riga)

$\forall\ i = 1, \dots, n$;

ii) $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij}^*$ (sviluppo secondo la j-esima colonna).

$\forall\ j = 1, \dots, n$

Es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot (-2) - 3(1-6) = 11$$

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3(1-6) - 4 = 11.$$

Dim La formula ii) segue subito dalla i) a meno di passare alla trasposta. Dimostriamo la i) per $i=n$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1\,\sigma(n-1)}\, a_{nk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1\,\sigma(n-1)}}_{\text{non compare riga } n \text{ e colonna } k}$$

$$\pi = \underbrace{(n\ \ n-1) \circ \cdots \circ (k+2\ \ k+1) \circ (k+1\ \ k)}_{n-k \text{ fattori}} \Rightarrow \operatorname{sgn} \pi = (-1)^{n-k}$$

π manda $k+1,\ k+2, \ldots, n$ ordinatamente in

$k,\ k+1, \ldots, n-1$

$\pi(k) = n \Rightarrow \sigma' = \pi \circ \sigma$ soddisfa $\sigma'(n) = n$ se $\sigma(n)=k$

e $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n+k} \operatorname{sgn} \sigma \Rightarrow$

σ differisce da una permutazione di $\{1, \ldots, n-1\}$ a meno di $n-k$ trasposizioni $\Rightarrow$

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1\,\sigma(n-1)} = a^*_{nk}.$$

Se $i \neq n$ possiamo ridurci al caso precedente con $n-i$ scambi di righe successive.