

P.I. and Θ -term

Se sp. Q non-simpl. conn.: 1) aggiungere A (con B=0) cambia le predizioni della teoria quant. 2) ambiguità nel def. P.I.

C'è una corrispondenza 1 a 1 tra i caratteri di $\pi^1(Q)$ e i potenziali vettoriali ("flat connection") A viste nello studio dell'effetto di AB:

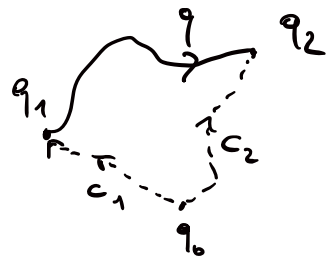
$$\chi(\alpha) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint_{\alpha} A} \quad \begin{matrix} \ell \in \alpha \\ \uparrow \\ \text{classe di equiv.} \end{matrix}$$

Prendiamo teoria di partenza; aggiungiamo derivate totali e vediamo se P.I. viene modificato da $\chi(\alpha)$

Aggiungiamo all'azione il "termine topologico"

$$S_T = \frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{q} \cdot \bar{A} \quad \leftarrow \text{dipende solo da pt iniziale e pt finale e della classe di omotopia}$$

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int_{\substack{Dq \\ q(t_1)=q_1 \\ q(t_2)=q_2}} e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_T)} =$$



$$= \sum_{\alpha} e^{\frac{iS_T}{\hbar}} \int Dq_{\alpha} e^{iS/\hbar}$$

$$= \sum_{\alpha} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{\alpha} A} K_{\alpha}(q_2, q_1) =$$

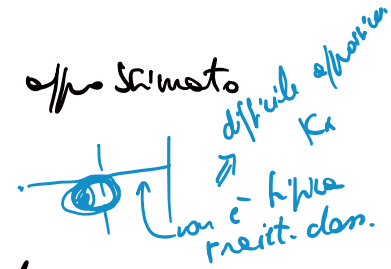
$$= \sum_{\alpha} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{c_2 \alpha c_1^{-1}} A} K_{\alpha}(q_2, q_1) =$$

$$= \sum_{\alpha} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{c_2} A} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{\alpha} A} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{c_1^{-1}} A} K_{\alpha}(q_2, q_1)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c} \left(\int_{c_2} A + \int_{c_1^{-1}} A \right)}}_{\text{fase irrilevante}} \sum_{\alpha} \chi(\alpha) K_{\alpha}(q_2, q_1) \quad !$$

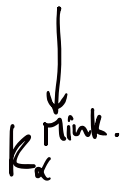
Per calcolare l'ampiezza, non si deve calcolare i singoli K_α , che sono definiti da P.I. standard.

In situazione semiclassica ($\hbar \rightarrow 0$) K_α è ben approssimato da $e^{iS[\varphi_\alpha]} (\det \Delta)^\alpha$ ← integrale Gaussiano



Tipicamente le classi α non contengono soluzioni classiche. Tuttavia, se passano all'Eucledio $S \rightarrow S_E$ $\int \rho e^{iS} + \int \rho e^{-S_E}$
 → S_E ammette soluzioni alle sue eq. di Lagrange nelle classi di omotopia α , chiamati **INSTANTONI**

$$K_\alpha^E \sim e^{-S_E(\varphi_{ist})} (\det \Delta)^\alpha$$

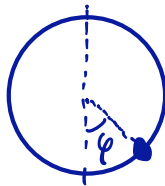


CONTINUAZIONE ANALITICA

$$K_\alpha^{Mink.}$$

PENDOLO

$$Q = S^1 \leftarrow \text{circonferenza}$$



↓ g

$$\pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$$



Ci aspettiamo quantizzazioni inequivolenti, parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$$

$$V(\varphi) = b(1 - \cos \varphi)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Termine topologico (↪ interazione con un potenziale vettore)

$$L_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$$

(derivata totale)



$$S_T = \theta \frac{k}{2\pi} \int dt \frac{d\varphi}{dt} = \theta k \underbrace{W[\varphi]}_{\text{winding number} \in \mathbb{Z}}$$

Assumendo che
 $\varphi \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \pm\infty$

Istantoni in il pendolo: $t \rightarrow iz$ $iS \rightarrow -S_E$

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + b(1 - \cos \varphi) \right]$$

Eq. del mot \rightarrow eq. di Lagr. associate a S_E , ubi le solut.

sous l.c. $\delta S_E = 0$.

Sol: $\varphi_{\text{ist.}} = \pm 4 \arctan \left(e^{\sqrt{b}(\tau - \tau_0)} \right)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{in } \tau \rightarrow -\infty & \quad \varphi \rightarrow 0 \\ \text{in } \tau \rightarrow +\infty & \quad \varphi \rightarrow 2\pi \end{aligned}$$



$$W(\varphi) = 1$$

- $S_E(\varphi_{\text{ist.}})$ è finita
- $\varphi_{\text{ist.}}$ non può essere deformata in maniera continua alle solut. "di vuoto", ubi $\varphi_0(\tau) = \varphi_{\text{cost}}$
- Esistono solut. con $W(\varphi) \neq 1$, ce ne è una in ogni classe di omotopia, $\varphi_{\text{ist.}}^\alpha$

$$\bullet K_\alpha \sim e^{-S_E(\varphi_{\text{inst.}}^\alpha)} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$$

$$K = \sum_\alpha \underbrace{\chi(\alpha)}_{e^{-S_E(\varphi_{\text{inst.}}^\alpha)} \sim e^{-n(\dots)}} e^{-S_E^{(0)}(\varphi_{\text{inst.}}^\alpha)} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$$

$$[\alpha] \sim n$$

$$\pi(YQ) \cong \mathbb{Z}$$

↑ contributo di K_α
diminuisce all'
aumentare di n

SPAZIO DELLE CONFIG. in teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo una teoria di YM. Usiamo la gauge $A_0^a = 0$
coord. in Q (gauge fixing)

• La teoria è descritta dalle "coord" $A_i^a(\bar{x})$ $i=1,2,3$
↑ indice continuo $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$
(t è il parametro delle traiettorie)

• Per semplicità consideriamo $G = SU(2)$.

• $A_i^a(\bar{x})$ sono riducibili, a causa delle transf. di gauge residue:

$$A_i \mapsto U A_i U^{-1} + i \partial_i U U^{-1} \quad U: \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2)$$

$$A_0 = 0 \mapsto A_0 = 0$$

• Spazi rilevanti in noi:

$$\mathcal{A} = \{ \text{gauge fields } A_i^a(\bar{x}) \}$$

$$\Omega_x = \{ \text{transf. } U: \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2) \text{ t.c. } U(\bar{x}) \rightarrow 1 \text{ in } |\bar{x}| \rightarrow \infty \}$$

• Lo sp. delle conf. è $Q = \mathcal{A} / \Omega_x$
 Ω agisce trasformando gli stati con G all'1;
 Ω_x invece è una riducibilità perché lascia stati fisici invari.

\mathcal{A} è uno spazio AFFINE (cioè ogni A_i può essere scritto come $A_i^{(0)} + h_i$ dove $A_i^{(0)}$ è l'origine fissata e h_i un vettore arbitrario (o vobis nell'Alg. di Lie)):

se $A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \in \mathcal{A}$ allora possiamo costruire il cammino

$$A_i(\bar{x}; z) = A_i^{(1)}(\bar{x})(1-z) + z A_i^{(2)}(\bar{x}) \in \mathcal{A} \\ \forall z \in [0, 1]$$

$\hookrightarrow \mathcal{A}$ ha le proprietà di uno spazio Euclideo a dim. n , che è topologicamente triviale; in particolare

$$\pi^1(\mathcal{A}) = 0.$$

Ω_4 $G = SU(2)$. Paramettrizziamo $SU(2)$ nel seguente modo

$$U = \phi_0 \mathbb{1}_2 + i \phi_i \sigma_i \\ \text{con } \phi_0, \phi_i \in \mathbb{R} \text{ e } \phi_0^2 + \sum_i \phi_i^2 = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{questo implica} \\ \text{che } U^\dagger = U^{-1} \\ \text{e } \det U = 1 \end{array} \right.$$

$$U(x) = \phi_0(x) + i \phi_i(x) \sigma_i$$

$SU(2)$ è topologicamente
una SFERA S^3

In particolare, $\phi_\mu(x)$ ($\mu=0,1,2,3$) sono mappe: $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$

Inoltre se $U(x) \in \Omega_4$, $U(x) \rightarrow \mathbb{1}$
 $\bar{x} \rightarrow \infty$

\Rightarrow possiamo identificare i pt. all'infinito: $U(x)$ si comporta come una funzione da $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow S^3$,
cioè $U: S^3 \rightarrow S^3$ e $U \in \Omega_4$



Esplícitam: $y_0 \equiv \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $y_i \equiv \frac{2x_i}{x^2+1}$ $y_0^2 + \sum_i y_i^2 = 1$

• diversi x_i danno diversi y_i

• $|x| \rightarrow \infty$ corrisponde a $y_0 = 1$ $y_i = 0$

$U \rightarrow 11$ in $y \rightarrow (1, 0, 0, 0)$

Le mappe $U(x)$ sono giuste. $S^3 \rightarrow S^3$. Tali mappe

sono classificate in CLASSI DI OMOLOGIA da

effettivamente al gruppo $\pi^3(S^3) \cong \mathbb{Z}$

Si analizza per mappe definite un WINDING NUMBER W

(ci dice quante volte $\sum_{S^3_x}$ è avvolto su S^3_ϕ)

$\phi_\mu : S^3_x \rightarrow S^3_\phi$

Winding number:

consideriamo l'elemento di volume in l'immagine generata da ϕ_μ

$dS_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x$

\updownarrow

$dS_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta d^3x$

$= \phi_\mu d\Omega^{(3)}$

$d\Omega^{(3)\mu} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \partial_i \phi_\nu \partial_j \phi_\alpha \partial_k \phi_\beta \phi_\mu d^3x$

Il volume di S^3 è $2\pi^2$, mentre il volume

misurato con l'immagine di ϕ è $\int_{S^3_x} d\Omega^{(3)}$

$$W(\phi) = \frac{\text{volume misurato con immagine di } \phi}{\text{volume misurato con misura standard su } S^3}$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} d\Omega^{(3)} = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta$$

\swarrow
 $2\pi^2 \cdot 3!$

$$W(U) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} d^3x \text{Tr} [U^{-1} \partial_i U U^{-1} \partial_j U U^{-1} \partial_k U] \epsilon^{ijk}$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} \text{Tr} [(U dU^{-1})^3]$$

W ha le seguenti proprietà: "invariante topologica"

1) W è invariante per deformazioni continue delle mappe $\phi_\mu(x)$
 (W è costante su una classe di omotopia)

consideriamo una def. $\delta\phi^\mu$ t.c. $\delta\phi^\mu \rightarrow 0$ per $|\bar{x}| \rightarrow \infty$

(per precisione $U \rightarrow 1$ per $|\bar{x}| \rightarrow \infty$)

inoltre $\phi^\mu \delta\phi^\mu = 0$ (vedi $\phi^\mu \phi^\mu = 1$)

allora

$$\delta W = W(\phi + \delta\phi) - W(\phi) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\delta\phi^\mu \overbrace{d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta} \sim \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x + \right.$$

$$\left. + \phi^\mu d\delta\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\delta\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\delta\phi^\beta \right]$$

intgr. in parti
 $\xrightarrow{\delta\phi \rightarrow 0 \text{ al bordo}}$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \delta\phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta$$

↳ altro termine
 quod integr
 in parti

Teniamo conto che $\delta\phi^\mu\phi^\mu = 0 \Rightarrow \delta\phi^\mu = \epsilon^{\mu\sigma\lambda} \omega_{\sigma\tau} \phi_\lambda$

con $\omega_{\sigma\tau}$ tensor antisim.

(è come dire in 3d che un vett. \vec{v} è perpendicolare a \vec{w} nel seguente modo

$$\delta\vec{v} = \vec{w} \times \vec{v})$$

$$\rightarrow \delta W = \frac{1}{48\pi^2} \int d^3x \left(\underbrace{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}_6 \underbrace{\epsilon^{\mu\sigma\lambda}}_{\substack{\text{somme di prodotti di} \\ \delta\text{-symbols } \delta_{\nu\alpha\beta}^{\sigma\lambda}}} \right) \omega_{\sigma\tau} \phi_\lambda \underbrace{d\phi^\nu d\phi^\alpha d\phi^\beta}_{\substack{\downarrow \\ \phi_\lambda d\phi^\lambda = d(\phi_\lambda^2) = 0}} = 0 //$$